



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

CONSTRUCCIONES DE JAULAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:  
ALEJANDRO VÁZQUEZ GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. ENRIQUE CASAS BAUTISTA



2018





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

CONSTRUCCIONES DE JAULAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:  
ALEJANDRO VÁZQUEZ GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. ENRIQUE CASAS BAUTISTA



2018



VOTO APROBATORIO

Toda vez que el trabajo de evaluación profesional, ha cumplido con los requisitos normativos y metodológicos, para continuar con los trámites correspondientes que sustentan la evaluación profesional, de acuerdo con los siguientes datos:

Nombre del pasante	Alejandro Vázquez González			
Licenciatura	Matemáticas	N° de cuenta	1027494	Generación
Opción	tesis	Escuela de Procedencia	Facultad de Ciencias	
Nombre del Trabajo para Evaluación Profesional	Construcciones de Jaulas			

NOMBRE		FIRMA DE VOTO APROBATORIO	FECHA
ASESOR	Dr. Enrique Casas Bautista		8/05/2018
COASESOR ASESOR EXTERNO (Sólo si aplica)			

NOMBRE		FIRMA Y FECHA DE RECEPCIÓN DE NOMBRAMIENTO	FIRMA Y FECHA DE ENTREGA DE OBSERVACIONES	FIRMA Y FECHA DEL VOTO APROBATORIO
REVISOR	Dra. María del Rocío Rojas Monroy	 9 marzo 2018		 8 mayo 2018
REVISOR	M. en C. Adriana Miranda Cotardo	 9 marzo 2018	 24 abril 2018	 8 mayo 2018

Derivado de lo anterior, se le **AUTORIZA LA REPRODUCCIÓN DEL TRABAJO DE EVALUACIÓN PROFESIONAL** de acuerdo con las especificaciones del **anexo 8.7** "Requisitos para la presentación del examen de evaluación profesional".

ÁREA DE EVALUACIÓN PROFESIONAL	NOMBRE	FIRMA	FECHA

# Prefacio

Esta tesis comienza realmente en el capítulo 2 donde presento un amplio y preciso análisis sobre la Teoría de Jaulas, así como su desarrollo y algunos de los principales resultados existentes, además de servir como justificación y base para los capítulos posteriores.

El problema de las jaulas requiere de la construcción de gráficas regulares simples con un grado específico, cuello y orden mínimo. Este problema fue considerado por primera vez por Tutte (ver [61]) aunque el concepto de una jaula llega hasta la década de 1940s (ver [61]). El orden de las jaulas solo se completó para un conjunto bastante limitado de parámetros. Una variación del problema es en el que se exigía que las gráficas fueran hamiltonianas, este problema fue estudiado por K'artesz (ver [41]). Al mismo tiempo, el estudio de las Gráficas de Moore, propuesto por E. F. Moore (ver [37]), fue desarrollado por Hoffman y Singleton en 1960 (ver [37]).

Como el orden de las jaulas aumenta, la búsqueda de estas estructuras se vuelve cada vez más difícil, por lo que se reactivó recientemente el interés en las jaulas, esto se puede atribuir en gran parte a tres factores principales:  
La disponibilidad de computadoras más rápidas, la introducción de nuevas áreas técnicas que no se tenían tradicionalmente en la teoría de gráficas, y aplicaciones para la construcción de códigos.

Esta tesis tendrá dos vertientes importantes;

- Límites inferiores y Límites superiores de Jaulas
- Construcciones de Jaulas

Con lo cual se establecerán algunas cotas para jaulas con características específicas, del mismo modo usaremos las  $(k, g)$ -Gráficas, para establecer un *exceso* sobre dichas jaulas (ver [17]), y con ello se abordaran resultados importantes para sus construcciones.

Así mismo mostraremos gráficamente algunas jaulas y desarrollaremos una serie de métodos para su posible construcción dichos métodos se divide en;

Construcciones generales; construcciones que producen gráficas con valores arbitrariamente grandes de grado o cuellos.

Construcciones individuales; que trabajan para valores específicos de cuello y grado.

Finalmente se darán los principales límites para algunas jaulas específicas.

# Índice general

Agradecimientos	v
Prefacio	VII
<b>1. CONCEPTOS BÁSICOS DE GRÁFICAS</b>	<b>11</b>
1.1. Gráficas	11
1.2. Recorridos y distancias	15
<b>2. GRÁFICAS DE MOORE Y JAULAS</b>	<b>21</b>
2.1. Gráficas de Moore	21
2.2. Jaulas	24
2.3. Jaulas conocidas	26
2.3.1. (3, 5) – <i>Jaula</i> : Gráfica de Petersen	26
2.3.2. (3, 6) – <i>Jaula</i> : Gráfica de Heawood	27
2.3.3. (3, 7) – <i>Jaula</i> : Gráfica de McGee	27
2.3.4. (3, 8) – <i>Jaula</i> : Gráfica de Tutte-Coxeter	28
2.3.5. (3, 9) – <i>Jaula</i>	28
2.3.6. (3, 10) – <i>Jaula</i>	29
2.3.7. (3, 11) – <i>Jaula</i> : Gráfica de Balaban	29
2.3.8. (3, 12) – <i>Jaula</i> : Gráfica de Benson	30
2.3.9. (4, 3) – <i>Jaula</i>	30
2.3.10. (4, 4) – <i>Jaula</i>	31
2.3.11. (4, 5) – <i>Jaula</i> : Gráfica de Robertson	31
2.3.12. (4, 6) – <i>Jaula</i>	32
2.3.13. (5, 3) – <i>Jaula</i>	32
2.3.14. (5, 4) – <i>Jaula</i>	33
2.3.15. (5, 5) – <i>Jaula</i>	33
2.3.16. (5, 6) – <i>Jaula</i>	34
2.3.17. (6, 3) – <i>Jaula</i>	35

2.3.18. (6, 4) – <i>Jaula</i> . . . . .	35
2.3.19. (6, 5) – <i>Jaula</i> . . . . .	36
2.3.20. (7, 5) – <i>Jaula</i> : Gráfica de Hoffman-Singleton . . . . .	36
2.3.21. (7, 6) – <i>Jaula</i> . . . . .	37
<b>3. GRÁFICAS GEOMÉTRICAS</b>	<b>39</b>
3.1. Estructura de Incidencia . . . . .	39
3.2. Las Gráficas de Incidencia de los Planos Proyectivos . . . . .	41
3.3. Gráficas de Incidencia de Cuadriláteros Generalizados . . . . .	43
3.4. Gráficas de Incidencia de Hexágonos Generalizados . . . . .	45
<b>4. RESULTADOS GENERALES EN JAULAS</b>	<b>47</b>
<b>5. LÍMITES INFERIORES DE JAULAS</b>	<b>55</b>
5.1. Teorema de la Bipartición . . . . .	56
5.2. Gráficas con cuello 6 . . . . .	62
<b>6. LÍMITES SUPERIORES DE JAULAS</b>	<b>67</b>
6.1. Construcciones generales . . . . .	67
6.1.1. Construcciones con cuellos grandes . . . . .	67
6.1.2. Construcción de cuello 5 . . . . .	78
6.1.3. Construcción de cuello 6, 8 y 12 . . . . .	81
6.1.4. Supresión . . . . .	83
6.2. Construcciones individuales . . . . .	86
6.2.1. Construcciones Individuales para el grado 3 . . . . .	86
6.2.2. Construcciones Individuales para el cuello 5 . . . . .	94
6.2.3. Construcciones Individuales para el cuello 6 . . . . .	97
<b>GRÁFICAS DE VOLTAJE</b>	<b>99</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>101</b>

# 1. CONCEPTOS BÁSICOS DE GRÁFICAS

En este capítulo introduciremos definiciones, notaciones y resultados básicos necesarios para la comprensión del trabajo que se desarrollará. El nacimiento del concepto GRÁFICA se puede situar, por el año 1730, cuando Leonhard Euler, considerado el padre de la Teoría de Gráficas modeló un famoso problema, llamado el “problema de los puentes de Königsberg” y cuya solución dio origen a la Teoría de Gráficas (ver[31]).

## 1.1. Gráficas

**Definición 1.1.1.** Una gráfica  $G = \{V(G), A(G)\}$  consiste de un conjunto finito, no vacío de objetos llamado vértices, puntos o nodos y un conjunto de pares no ordenados  $(u, v)$  de vértices llamadas aristas, líneas, ramas o arcos. El conjunto de vértices de  $G$  se denota por  $V(G)$  y el conjunto de aristas de  $G$  por  $A(G)$ .

**Observación 1.1.2.** Si una gráfica  $G$  consta solamente de un vértice, se llama gráfica trivial, de lo contrario diremos que  $G$  es no trivial.

**Ejemplo 1.1.3.** Las gráficas  $H$  y  $G$  de la figura 1.1 representan una gráfica trivial y una no trivial respectivamente.

**Definición 1.1.4.** Sea  $G$  una gráfica. Si  $a = (u, v)$  es una arista de  $G$ , con  $u$  y  $v$  vértices de  $G$ , decimos que  $u$  y  $v$  son los extremos de  $a$ .

**Ejemplo 1.1.5.** Los vértices  $x$  y  $r$  son los extremos de la arista  $(x, r)$  de la gráfica  $G$  de la figura 1.1.

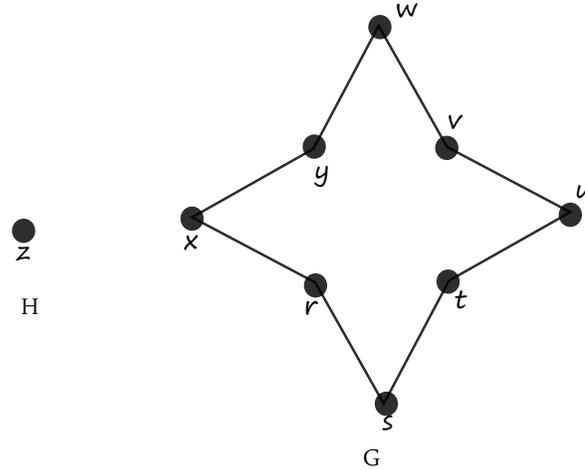


Figura 1.1:

**Definición 1.1.6.** *Un lazo es una arista que va de un vértice en si mismo. Dos aristas se llaman múltiples si tienen los mismos vértices en sus extremos.*

**Definición 1.1.7.** *Una gráfica que no contiene lazos ni aristas múltiples se llama gráfica simple.*

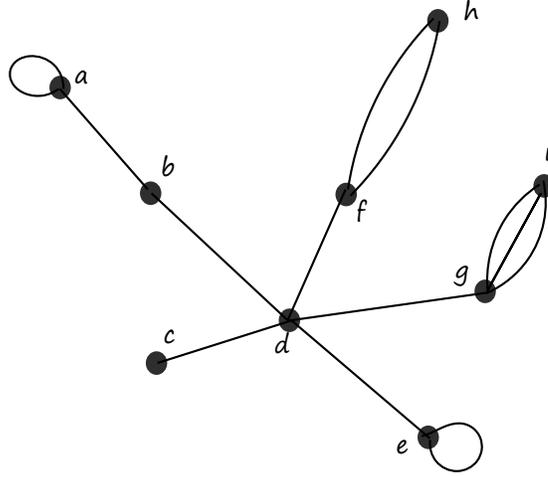
**Definición 1.1.8.** *Una gráfica que contiene lazos o aristas múltiples se llama multigráfica.*

**Nota 1.1.9.** *En el presente trabajo solo consideraremos gráficas simples, por lo tanto el termino gráfica significará gráfica simple, salvo que se especifique lo contrario.*

**Ejemplo 1.1.10.** *En la figura 1.2 se muestra una gráfica finita  $G$ , con  $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ , tiene dos lazos  $\{(a, a), (e, e)\}$  y cuenta con aristas múltiples  $\{(f, h), (g, i)\}$ , así  $G$  es una multigráfica.*

**Definición 1.1.11.** *Si  $u$  y  $v$  son dos vértices de una gráfica  $G$  y  $a = (u, v) \in A(G)$  diremos que  $u$  y  $v$  son adyacentes (y lo denotamos por  $u \text{ ady}_G v$ ).*

**Ejemplo 1.1.12.** *En la gráfica  $G$  de la figura 1.1, los vértices  $x$  y  $r$  son adyacentes.*

Figura 1.2: Gráfica  $G$ 

**Nota 1.1.13.** Dada una gráfica  $G$ ,  $a$  y  $b$  dos aristas de  $G$  son adyacentes si tienen un extremo en común.

**Ejemplo 1.1.14.** En la gráfica  $G$  de la figura 1.1, podemos notar que las aristas  $(y, x)$  y  $(x, r)$  son adyacentes.

**Definición 1.1.15.** Sea  $G$  una gráfica,  $v \in V(G)$  y  $a \in A(G)$ , diremos que  $a$  incide en  $v$  si la arista  $a$  tiene como uno de sus extremos al vértice  $v$ .

**Ejemplo 1.1.16.** En la gráfica  $G$  de la figura 1.1 la arista  $(x, y)$  incide tanto en el vértice  $x$  como en el vértice  $y$ .

**Definición 1.1.17.** Definimos el orden de  $G$  como el número de vértices que contiene  $G$ .

**Definición 1.1.18.** Dada una gráfica  $G$ , decimos que  $H$  es una subgráfica de  $G$ , si  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $A(H) \subseteq A(G)$ .

**Definición 1.1.19.** Una gráfica  $G$  es completa si todo par de vértices distintos de  $G$  son adyacentes. Si  $|V(G)| = n$  entonces  $G$  se denotara como  $K_n$ .

**Definición 1.1.20.** Sea  $G = (V, A)$  una gráfica, el complemento de  $G$  denotada por  $G^c$ ,  $V(G^c) = V(G)$  y  $A(G^c) = A^c$  donde  $A^c = \{(u, v) \mid u, v \in V(G) \text{ y } (u, v) \text{ no está en } A\}$ .

**Definición 1.1.21.** Para todo  $v \in V(G)$ , el grado o valencia de  $v$ , es el número de veces que  $v$  figura como extremo de una arista de  $G$ , se denota por  $gr_G(v)$  o  $d(v)$ .

**Definición 1.1.22.** Al grado menor de los vértices de  $G$ , se le llama grado mínimo y se le denota  $\delta(G)$ .

**Definición 1.1.23.** Al grado mayor de los vértices de  $G$ , se le llama grado máximo y se le denota  $\Delta(G)$ .

**Ejemplo 1.1.24.** En la figura 1.3 se muestra una gráfica  $H$ , tal que  $H$  es una subgráfica de  $G$ , (figura 1.2),  $V(H) = \{b, c, d, e, f, g, \}$ , así  $|V(H)| = 6$ , además  $gr_G(d) = 5$

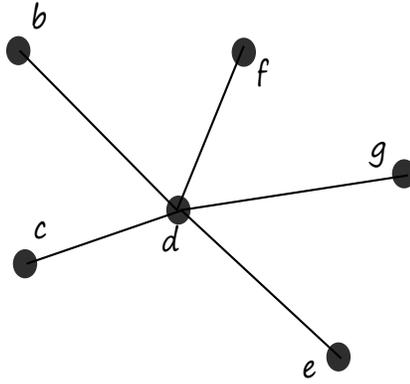


Figura 1.3: Gráfica  $H$

## 1.2. Recorridos y distancias

**Definición 1.2.1.** Sea  $G$  una gráfica. Un camino en  $G$ , es una sucesión alternante de vértices y aristas  $v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_n, v_n$  donde cada arista  $a_i$ , tiene por extremos a los vértices  $v_{i-1}, v_i$ , para  $i=1,2,3,\dots,n-1$ .

**Definición 1.2.2.** Un paseo es un camino en donde no se repiten aristas.

**Definición 1.2.3.** Una trayectoria en una gráfica  $G$  es un paseo en el que no se repiten vértices.

**Definición 1.2.4.** Un camino (paseo) no trivial cuyo vértice inicial y final es igual se dice cerrado.

**Definición 1.2.5.** La longitud de un camino de una gráfica  $G$  es el número de aristas que lo forman.

El recorrido de longitud mínima entre  $x$  e  $y$  se llama camino más corto.

**Definición 1.2.6.** Un paseo cerrado  $P=v_0, v_1, \dots, v_n=v_0$ , en el cual no hay ocurrencia de vértices repetidos, excepto  $v_0$  y  $v_n$  se llama ciclo.

**Definición 1.2.7.** Un ciclo en una gráfica  $G$  es un camino cerrado  $C = (u_1, u_2, \dots, u_n, u_1)$  donde  $u_i \neq u_j$  para todo  $i \neq j$  y  $n \geq 3$ .

Un ciclo mínimo es el ciclo de menor longitud "en una gráfica".

**Definición 1.2.8.** Sea  $u, v \in V(G)$ , denotamos como  $d(u, v)$  o  $\partial(u, v)$ , a la distancia mínima entre cualesquiera dos vértices de  $G$ , es decir a la longitud del camino más corto existente; cuando no existe camino, se dice que  $d(u, v) = \infty$ .

**Ejemplo 1.2.9.** En la figura 1.4 se muestra una gráfica finita  $G$ , con  $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ , tal que;

$C_1 = (a, b, c, b, f, g, h)$  es un camino.

$C_2 = (a, b, f, e, d, b, a)$  es un camino cerrado.

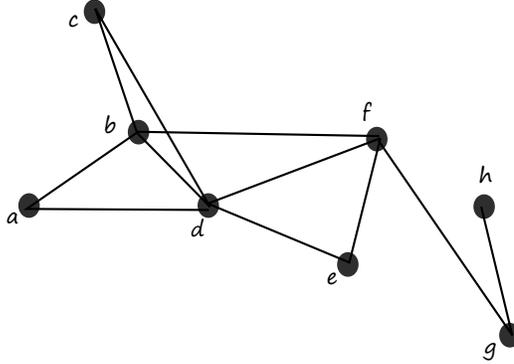
$P_1 = (a, b, f, g)$  es un paseo.

$P_2 = (a, d, c, b)$  es un paseo cerrado.

$T_1 = (f, g, h)$  es una trayectoria.

$C_3 = (c, d, e, f, b, c)$  es un ciclo.

**Definición 1.2.10.** La excentricidad de un vértice  $v$  perteneciente a  $G$ , que denotaremos  $ex(v)$ , es la máxima distancia  $d(u, v)$  entre todos los  $u$  pertenecientes a  $G$ .

Figura 1.4: Gráfica  $G$ 

**Definición 1.2.11.** Llamaremos diámetro  $D(G)$ , a la máxima excentricidad de todos los vértices de  $G$ .

El radio de  $G$ , denotado por  $r(G)$ , es la mínima excentricidad de todos los vértices de  $G$ .

**Observación 1.2.12.** El diámetro de una gráfica  $G$ , se define como la longitud de la trayectoria más corta, para unir los vértices más alejados de  $G$ .

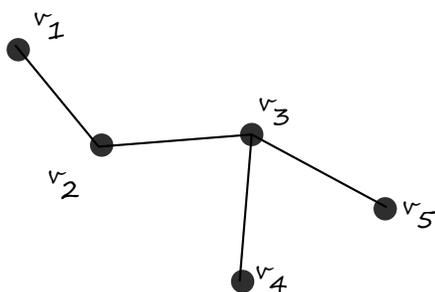
**Ejemplo 1.2.13.** En la figura 1.5 tenemos una gráfica  $G$  tal que  $ex(v_1) = 3$ ,  $ex(v_2) = 2$ ,  $ex(v_3) = 2$ ,  $ex(v_4) = 3$ ,  $ex(v_5) = 3$ ,  $ex(v_1) = ex(v_4) = ex(v_5) = 3$  y  $ex(v_2) = ex(v_3) = 2$ , entonces  $D(G) = 3$  y  $r(G) = 2$ .

**Definición 1.2.14.** Dos gráficas  $G$  y  $H$  son isomorfas si y sólo si existe una función biyectiva  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que si  $u$  ady $_G$   $v$  y entonces  $f(u)$  ady $_H$   $f(v)$ .

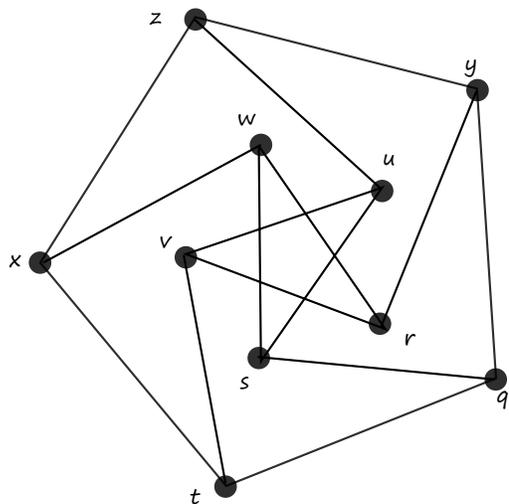
**Definición 1.2.15.** Una gráfica  $k$ -regular o de grado  $k$  es aquella en la que todos sus vértices tienen grado  $k$ .

**Definición 1.2.16.** Una gráfica es conexa si para cada par de vértices  $x$  e  $y$  existe un camino que va de  $x$  a  $y$ .

**Definición 1.2.17.** El cuello de una gráfica  $G$ , se define como la longitud del ciclo más pequeño de  $G$  y se denota por  $g$ .

Figura 1.5: Gráfica  $G$ 

**Ejemplo 1.2.18.** En la figura 1.6 una gráfica  $G$ , tal que  $V(G) = \{q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$ , es 3-regular,  $G$  contiene ciclos de diferentes longitudes, el conjunto de vértices  $g = \{q, y, r, w, s, q\}$  forman un ciclo de longitud mínima, es decir el cuello de  $G$ .

Figura 1.6: Gráfica  $G$ 

**Definición 1.2.19.** Se dice que una gráfica  $G$  de grado máximo  $\Delta$  y diámetro  $D$  es una gráfica densa si  $G$  tiene el mayor número posible de vértices.

**Definición 1.2.20.** *Un árbol es una gráfica conexa que no contiene ciclos.*

**Ejemplo 1.2.21.** *En la figura 1.7, se muestra una gráfica que es un árbol, cada vértice está representado por un punto, como  $\{u, v\}$ , donde  $(u, v)$  una arista, por una propiedad se cumple que la  $|V(G)| = 17$  y  $|A(G)| = 16$ .*

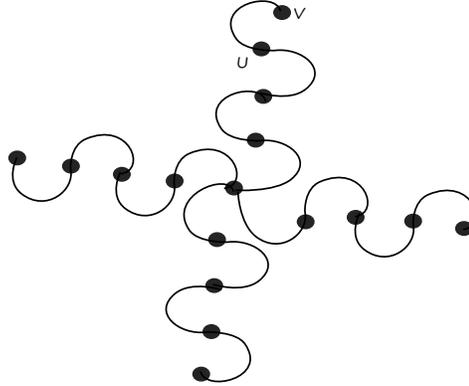


Figura 1.7: Árbol

**Definición 1.2.22.** *Una gráfica  $G$  es bipartita si existe una partición del conjunto de vértices de  $G$ , en dos conjuntos  $V_1$  y  $V_2$  de forma tal que cada arista de  $G$ , tiene un extremo en  $V_1$  y el otro extremo en  $V_2$ .*

**Definición 1.2.23.**  *$G$  es bipartita completa si todo vértice de  $V_1$  es adyacente a todos los vértices de  $V_2$ , la denotamos por  $K_{n,m}$ , donde  $n = |V_1|$  y  $m = |V_2|$ .*

**Definición 1.2.24.** *Sea  $G$  una gráfica y  $U \subseteq V(G)$ , definimos la subgráfica de  $G$  inducida por  $U$  como la gráfica que tiene a  $U$  como conjunto de vértices y como conjunto de aristas a todas las aristas de  $G$  que tiene ambos extremos en  $U$ . Denotamos a la subgráfica de  $G$  inducida por  $U$  como  $G[U]$  o  $\langle U \rangle_G$ .*

**Definición 1.2.25.** *Sea  $G$  una gráfica y  $A' \subseteq A(G)$ , definimos la subgráfica de  $G$  inducida por  $A'$  como la gráfica que tiene a  $A'$  como conjunto de aristas y cuyo conjunto de vértices son los extremos de todas las aristas de  $A'$ . Denotamos a la subgráfica de  $G$  inducida por  $A'$  como  $G[A']$  o  $\langle A' \rangle_G$ .*

**Ejemplo 1.2.26.** *La gráfica  $H$  de la figura 1.8 es la subgráfica de  $G$  inducida por el conjunto de vértices  $\{r, w, x, y, z\}$ , aunque  $H$  también es la subgráfica de  $G$  inducida por el conjunto de aristas  $\{(r, z), (r, w), (w, x), (w, y)\}$ .*

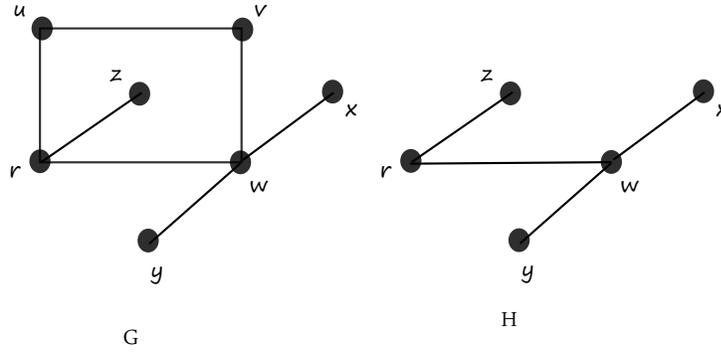


Figura 1.8:

**Definición 1.2.27.** *Un árbol de distancia de una gráfica  $G$  con respecto al vértice  $v$  es un árbol con vértice inicial o raíz  $v$ . Todos los vértices se enumeran de izquierda a derecha en niveles verticales de distancia creciente desde la raíz  $v$ , como se aprecia en la figura 1.9. Si  $G$  es desconexa, entonces todos los vértices fuera de la componente que contiene  $v$  se enumeran en el extremo derecho ya que la distancia de  $v$  a dicho vértice es infinito.*

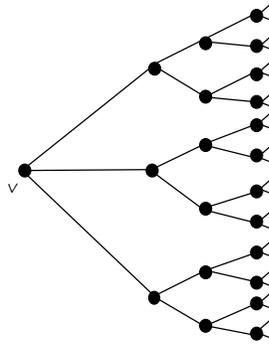


Figura 1.9: Árbol de distancia



# 2. GRÁFICAS DE MOORE Y JAULAS

## 2.1. Gráficas de Moore

Las Gráficas de Moore fueron introducidas por Hoffman y Singleton en 1960, llamadas así en homenaje a Edward F. Moore (ver [37]). Se usó por primera vez el término de Gráfica de Moore mientras estudiaban las Gráficas Regulares, relacionando el grado y el diámetro.

Es de gran interés en la Teoría de Gráficas el problema  $(\Delta, D)$ . Este problema consiste en encontrar gráficas con el mayor número posible de vértices para un grado máximo  $\Delta$  y un diámetro  $D$  dados. Junto al problema  $(\Delta, D)$  encontramos el problema  $(\delta, g)$ , que trata de encontrar gráficas con el menor número posible de vértices para un grado mínimo  $\delta$  y un cuello  $g$  dados. Las gráficas que cumplen esta condición reciben el nombre de *Jaulas*.

Los problemas  $(\Delta, D)$  y  $(\delta, g)$  pertenecen a la Teoría de Gráficas Extremales y están íntimamente relacionados. Es más, los problemas más interesantes en Teoría de Gráficas Extremales son aquellos que combinan ambos problemas  $(\Delta, D)$  y  $(\delta, g)$ . Por ejemplo, cuando  $g = 2D$ , el problema  $(\Delta, D)$  consiste en la búsqueda de los llamados Polígonos Generalizados.

Cuando  $g = 2D + 1$ , el problema  $(\Delta, D)$  consiste en la búsqueda de las llamadas Gráficas de Moore. El problema de las gráficas de Moore también puede enunciarse de una forma muy concisa. Consiste en encontrar gráficas regulares tales que la distancia entre dos vértices cualesquiera no sea superior a 2. Una gráfica de este tipo se llama Gráfica de Moore y se sabe que sólo puede existir para valores de grado iguales a 3, 7 y 57. Los primeros

dos casos son conocidos, mientras que el tercero, que recibe el nombre de “ La Gran Gráfica de Moore ”, sigue sin encontrarse.

El estudio comienza con la observación de que una gráfica de grado  $\Delta$  y diámetro  $D \geq 1$  tiene como máximo;

$$M(\Delta, D) = 1 + \Delta + \Delta(\Delta - 1) + \dots + \Delta(\Delta - 1)^{D-1}$$

vértices y las gráficas que logran este límite deben tener cuello  $g = 2D + 1$ .

**Definición 2.1.1.** Para grado máximo  $\Delta$  y diámetro  $D$  dados, se define la cota de Moore como el siguiente valor.

$$m = M(\Delta, D) = 1 + \Delta \sum_{i=1}^D (\Delta - 1)^{i-1} = \begin{cases} 2D + 1, & \text{si } \Delta = 2; \\ \frac{\Delta(\Delta-1)^D - 2}{\Delta - 2}, & \text{si } \Delta \geq 3. \end{cases}$$

**Afirmación 2.1.2.** Sea  $G$  una gráfica de grado máximo  $\Delta$  y diámetro  $D$ . Entonces el número de vértices  $n$  de  $G$  está acotado por la cota de Moore  $m$ , es decir se verifica que  $m \geq n$ .

*Demostración:* Asumiremos que todos los vértices de  $G$  tienen grado máximo es decir,  $G$  es  $\Delta$ -regular, el número de vértices a distancia  $i$  de un vértice cualquiera es  $\Delta(\Delta - 1)^{i-1}$ . Por lo tanto, el número máximo de vértices que puede tener la gráfica es  $1 + \Delta \sum_{i=1}^D (\Delta - 1)^{i-1}$ . ■

**Definición 2.1.3.** Las gráficas que alcanzan la cota de Moore reciben el nombre de gráficas de Moore.

Para que una gráfica sea de Moore, todos sus vértices tienen que tener grado máximo, es decir tiene que ser una gráfica  $\Delta$ -regular. Como se muestra en la figura 2.10, dicha gráfica es 3-regular de diámetro 2 y cuello 5.

Ahora una Gráfica de grado  $\Delta$  y cuello  $g = 2D$  tiene orden a lo más;

$$M_B(\Delta, D) = 2(1 + (\Delta - 1) + \dots + (\Delta - 1)^{D-1})$$

**Nota 2.1.4.** Si una gráfica de grado  $\Delta$  y cuello  $g = 2D$  tiene orden  $M_B(\Delta, D)$ , entonces es regular y bipartita, esta gráfica se conoce como “ Gráfica de Moore Bipartita ”.

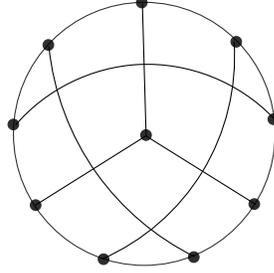


Figura 2.10: Gráfica Isomorfa a la Gráfica de Petersen

Una gráfica con grado  $\Delta$  y diámetro  $D$  tiene a lo más  $M_B(\Delta, D)$  vértices, si esta tiene exactamente  $M_B(\Delta, D)$  vértices entonces es una Gráfica de Moore Bipartita.

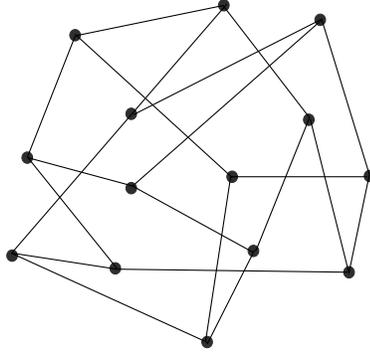
Una definición más general es la siguiente.

**Definición 2.1.5.** Una Gráfica de Moore del tipo  $M(k, g)$  es una gráfica regular de grado  $k > 2$  y cuello  $g$  que contiene el máximo número posible de vértices, es decir  $M(k, g) = n(k, g)$ ;

$$n(k, g) = \begin{cases} 1 + (k-1)^{g/2-1} + k \sum_{r=0}^{(g-4)/2} (k-1)^r, & \text{si } g \text{ es par;} \\ 1 + k \sum_{r=0}^{(g-3)/2} (k-1)^r, & \text{si } g \text{ es impar.} \end{cases}$$

En la figura 2.11 tenemos una gráfica de Moore la cual es 3-regular y tiene cuello 6, así;

$$\begin{aligned} M(3, 6) &= n(3, 6) \\ &= 1 + (3-1)^{6/2-1} + 3 \sum_{r=0}^{(6-4)/2} (3-1)^r \\ &= 1 + 2^2 + 3(2^0 + 2^1) \\ &= 14 \end{aligned}$$

Figura 2.11:  $M(3,6)$ , Gráfica de Heawood

## 2.2. Jaulas

El primero en estudiar esta familia de gráficas fue Tutte W. T. (ver [61]), cuando estudiaba las gráficas cúbicas.

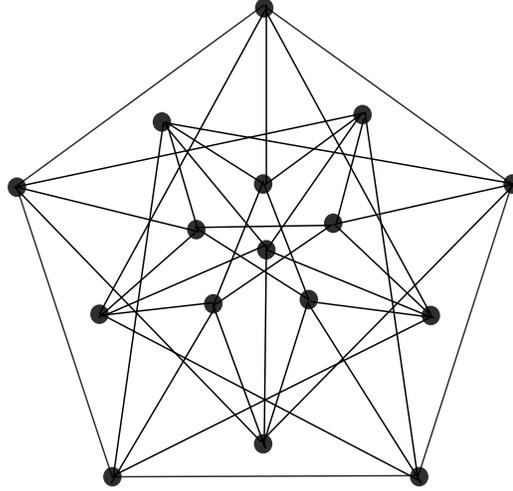
En general el problema de encontrar una jaula se considera como el “Cage Problem”. La existencia de una  $(k, g)$ –Jaula para cualquier par de enteros  $k > 2$  y  $g \geq 3$  no es trivial y fue hasta la década de los 60’s cuando Sachs dio una prueba constructiva de su existencia. Poco después Erdős y Sachs (ver [30]) dan otra demostración, en este caso no constructiva, de la existencia de las  $(k, g)$ –Jaulas. Las  $(k, g)$ –Jaulas se conocen para muy pocos valores de  $k$  y  $g$ .

**Definición 2.2.1.** Una  $(k, g)$ –Gráfica se define como una gráfica en la que cada vértice tiene exactamente  $k$  vecinos, y en el cual el ciclo más corto tiene una longitud exactamente  $g$ .

En la siguiente figura 2.12 se aprecia una  $(5, 4)$ –Gráfica .

**Observación 2.2.2.** Se sabe si existen  $(k, g)$ –Gráficas para cualquier combinación de  $k \geq 2$  y  $g \geq 3$ .

**Definición 2.2.3.** Una  $(k, g)$ –Jaula es una gráfica  $k$ –regular que tiene la menor cantidad de vértices posibles para su cuello  $g$ , es decir de mínimo orden.

Figura 2.12:  $(5, 4)$ –Gráfica

**Observación 2.2.4.** Una  $(k, g)$ –Jaula es una  $(k, g)$ –Gráfica con el menor número de vértices posibles, entre todas las  $(k, g)$ –Gráficas.

El problema de las jaulas pide la construcción de gráficas regulares de grado específico, cuello y orden mínimo.

En 1963 Erdős y Sachs (ver [30]), demostraron que existen jaulas para cualquier valor dado en  $k$  y  $g$ .

**Observación 2.2.5.** Si existe una Gráfica de Moore de grado  $k$  y cuello  $g$  debe ser una Jaula (ver [30]).

A partir de la observación previa decimos que los límites de las Gráficas de Moore se generalizan en Jaulas es decir, para  $k \geq 3$  y  $g \geq 5$  el orden de una Jaula está limitada por un *límite inferior* (Wong 1982 [65]) así:

$$n \geq \begin{cases} 1 + \sum_{i=0}^{\frac{g-3}{2}} k(k-1)^i = \frac{k(k-1)^{\frac{(g-1)/2-2}{k-2}}}{k-2}, & \text{si } g \text{ es impar;} \\ 2\sum_{i=0}^{\frac{g-2}{2}} (k-1)^i = \frac{2(k-1)^{\frac{g/2-2}{k-2}}}{k-2}, & \text{si } g \text{ es par.} \end{cases}$$

Este limite se llama el “ Limite de Moore ”, las gráficas para las que se mantiene la igualdad son Gráficas de Moore, en otro caso son Gráficas densas.

### 2.3. Jaulas conocidas

En esta sección, veremos algunas de las Jaulas conocidas, primero observaremos las  $(3, g)$ -Jaulas y notemos que esta clase de jaulas son gráficas cúbicas, tal que su orden al menos es;

$$n(3, g) = \begin{cases} 3 \cdot 2^{(g-1)/2} - 2, & \text{si } g \text{ es impar;} \\ 2^{(g+2)/2} - 2, & \text{si } g \text{ es par.} \end{cases}$$

#### 2.3.1. $(3, 5)$ - Jaula: Gráfica de Petersen

La Gráfica de Petersen es la única  $(3, 5)$ -Jaula (ver [23]), es 3-regular de diámetro 2 y cuello 5, tiene 10 vértices y 15 aristas, esta gráfica es nombrada así por Julius Peter Christian Petersen (ver [51]), publicada en 1898.

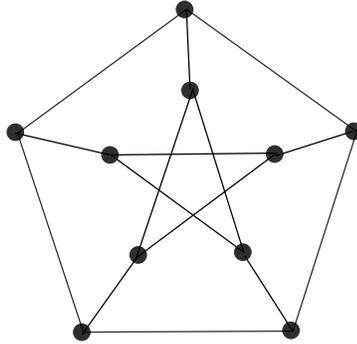


Figura 2.13: Gráfica de Petersen

### 2.3.2. $(3, 6)$ – *Jaula*: Gráfica de Heawood

La  $(3, 6)$ –*Jaula*, llamada Gráfica de Heawood. La gráfica fue nombrada así en honor a Percy John Heawood (ver [63]), quien publicó el resultado, tiene las características de ser 3 – *regular* de diámetro 3 y cuello 6, tiene 14 vértices y 21 aristas.

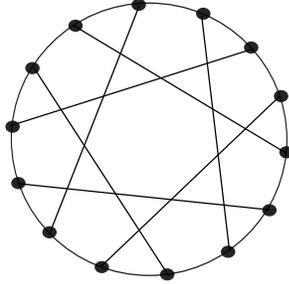


Figura 2.14: Gráfica de Heawood

### 2.3.3. $(3, 7)$ – *Jaula*: Gráfica de McGee

La  $(3, 7)$ –*Jaula*, es llamada Gráfica de McGees, tiene las características de ser 3 – *regular* con diámetro 4 y cuello 7, tiene 24 vértices y 36 aristas, esta gráfica fue descubierta por primera vez por Sachs (ver [41]), pero no publicada. La gráfica fue nombrada así en honor a W.F.McGee [46] quien publicó el resultado en 1960. La gráfica de McGee no es una Gráfica de Moore.

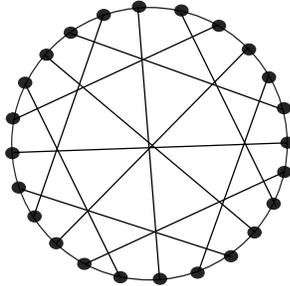


Figura 2.15: Gráfica de McGee

### 2.3.4. $(3, 8) - Jaula$ : Gráfica de Tutte-Coxeter

La Gráfica de Tutte-Coxeter es una  $(3, 8) - Jaula$ , tiene las características de ser  $3 - regular$  de diámetro 4 y cuello 8, tiene 30 vértices y 45 aristas, esta gráfica es nombrada así en honor a W.T.Tutte y H.S.M.Coxeter (ver [61]), publicada en 1950.

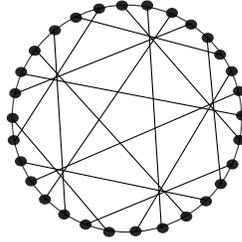


Figura 2.16: Gráfica de Tutte-Coxeter

### 2.3.5. $(3, 9) - Jaula$

Una  $(3, 9) - Jaula$ , es una gráfica  $3 - regular$ , la primera  $(3, 9) - Jaula$  fue publicada en 1980 por Biggs and Hoare (ver [15]), hay una lista de 18  $(3, 9) - Jaula$ , la cual fue completada por Brinkmann, McKay y Saager (ver [56]) en 1995.

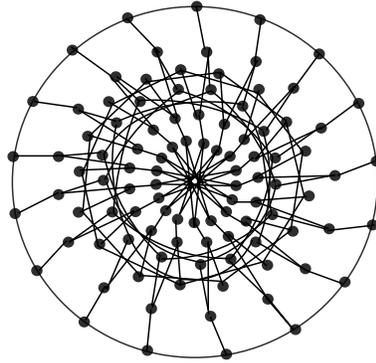


Figura 2.17:  $(3, 9) - Jaula$

### 2.3.6. $(3, 10) - Jaula$

Hay tres  $(3, 10) - Jaulas$ , son gráficas 3-regular de diámetro 6 y cuello 10, tienen 70 vértices y 105 aristas, la primera de estas gráficas fue descubierta por A.T.Balaban (ver [8]) y publicada en 1972, y más tarde las otras dos fueron encontradas por O'Keefde-Wong (ver [49]).

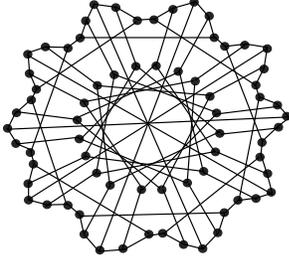


Figura 2.18:  $(3, 10) - Jaula$

### 2.3.7. $(3, 11) - Jaula$ : Gráfica de Balaban

Una  $(3, 11) - Jaula$ , es una gráfica 3-regular de diámetro 8 y cuello 11, tiene 112 vértices y 168 aristas, esta gráfica es publicada en 1973 por A. T. Balaban (ver [7]), y más tarde demostraron que es única Myrvold, McKay y Nadon (ver [47]).

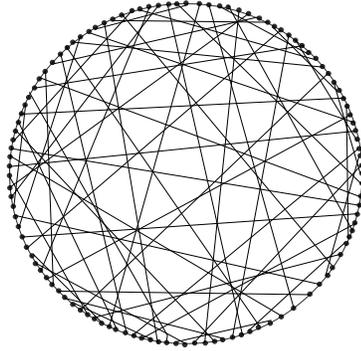
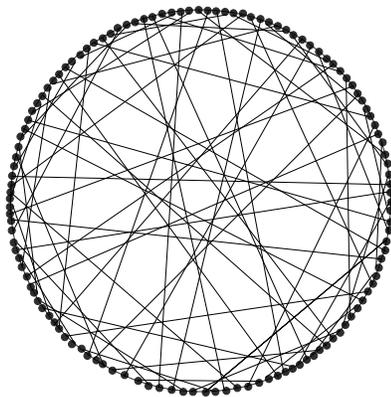


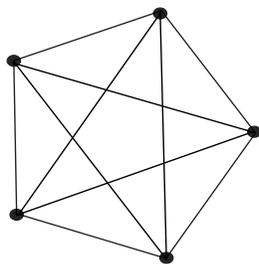
Figura 2.19:  $(3, 11) - Jaula$

**2.3.8.  $(3, 12) - Jaula$ : Gráfica de Benson**

La Gráfica de Benson es una  $(3, 12) - Jaula$ , tiene las características de ser  $3 - regular$  de diámetro 6 y cuello 12, tiene 126 vértices y 189 aristas, esta gráfica fue construida por primera vez por Benson (ver [13]) en 1966.

Figura 2.20:  $(3, 12) - Jaula$ **2.3.9.  $(4, 3) - Jaula$** 

Una  $(4, 3) - Jaula$ , es la Gráfica completa  $K_5$ , es  $4 - regular$  de diámetro 1 y cuello 3, tiene 5 vértices y 10 aristas (ver [53]).

Figura 2.21:  $(4, 3) - Jaula$

**2.3.10.**  $(4, 4) - Jaula$ 

Una  $(4, 4) - Jaula$ , es la Gráfica bipartita completa  $K_{4,4}$ , es  $4 - regular$  de diámetro 2 y cuello 4, tiene 8 vértices y 16 aristas (ver [65]).

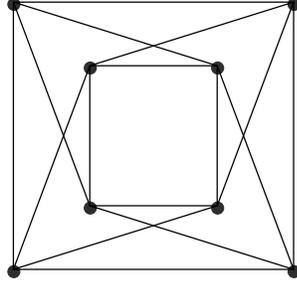


Figura 2.22:  $(4, 4) - Jaula$

**2.3.11.**  $(4, 5) - Jaula$ : Gráfica de Robertson

La Gráfica de Robertson es la única  $(4, 5) - Jaula$  (ver [54]), tiene las características de ser  $4 - regular$  de diámetro 5 y cuello 5, tiene 19 vértices y 38 aristas, esta gráfica es construida por Neil Robertson (ver [54]).

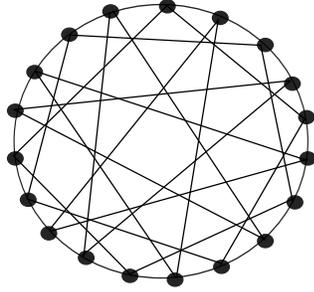
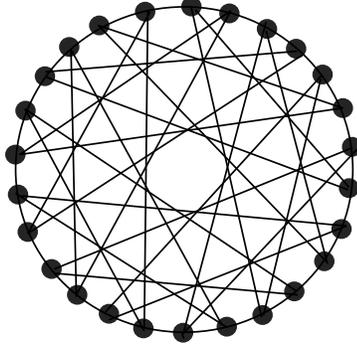


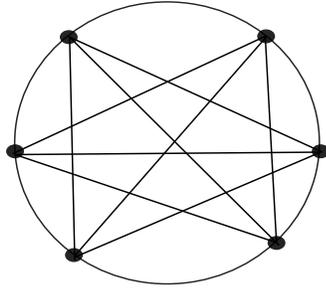
Figura 2.23: Gráfica de Robertson

**2.3.12.**  $(4, 6) - Jaula$ 

Una  $(4, 6) - Jaula$ , es  $4 - regular$  de diámetro 5 y cuello 6, tiene 26 vértices y 42 aristas, esta gráfica fue construida por Wong (ver [65]) en 1982.

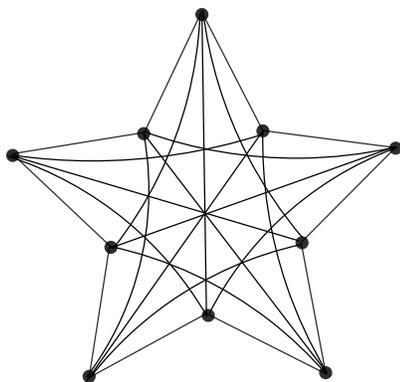
Figura 2.24:  $(4, 6) - Jaula$ **2.3.13.**  $(5, 3) - Jaula$ 

Una  $(5, 3) - Jaula$ , es la Gráfica completa  $K_6$ , es  $5 - regular$  de diámetro 1 y cuello 3, tiene 6 vértices y 15 aristas (ver [53]).

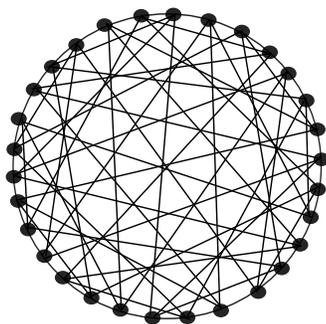
Figura 2.25:  $(5, 3) - Jaula$

**2.3.14.**  $(5, 4) - Jaula$ 

Una  $(5, 4) - Jaula$ , es la Gráfica bipartita completa  $K_{5,5}$ , es  $5 - regular$  de diámetro 2 y cuello 4, tiene 10 vértices y 25 aristas (ver [53]).

Figura 2.26:  $(5, 4) - Jaula$ **2.3.15.**  $(5, 5) - Jaula$ 

La Jaula Foster es una  $(5, 5) - Jaula$ , que tiene las características de ser  $5 - regular$  de diámetro 3 y cuello 5, tiene 30 vértices y 78 aristas, esta gráfica fue construida por Ronald Martin Foster ( ver [41], [24]).

Figura 2.27:  $(5, 5) - Jaula$

**2.3.16.**  $(5, 6) - Jaula$ 

La Gráfica de Royle es una  $(5, 6) - Jaula$ , que tiene las características de ser 5-regular de diámetro 3 y cuello 6, tiene 42 vértices y 105 aristas, esta gráfica fue construida por Royle (ver [52]).

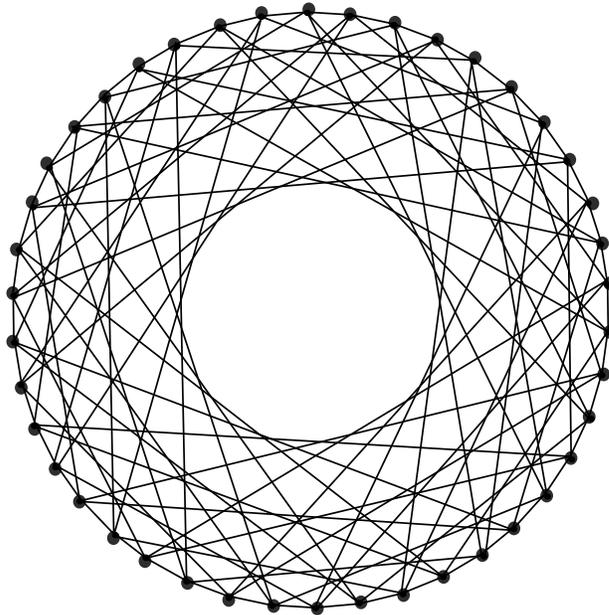


Figura 2.28:  $(5, 6) - Jaula$

**2.3.17.**  $(6, 3) - Jaula$ 

Una  $(6, 3) - Jaula$ , es la Gráfica completa  $K_7$ , es  $6 - regular$  de diámetro 1 y cuello 3, tiene 7 vértices y 21 aristas (ver [53]).

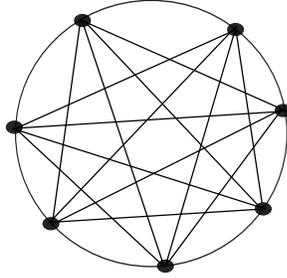


Figura 2.29:  $(6, 3) - Jaula$

**2.3.18.**  $(6, 4) - Jaula$ 

Una  $(6, 4) - Jaula$ , es la Gráfica bipartita completa  $K_{6,6}$ , es  $6 - regular$  de diámetro 2 y cuello 4, tiene 12 vértices y 36 aristas (ver [53]).

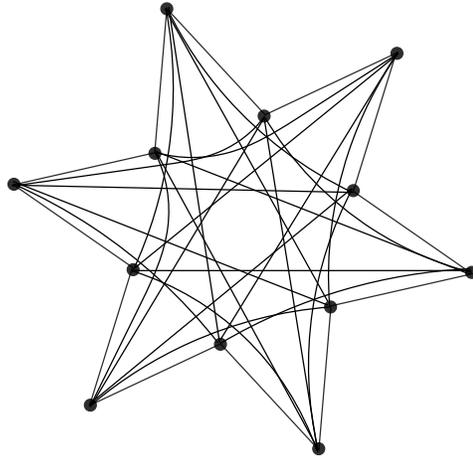


Figura 2.30:  $(6, 4) - Jaula$

**2.3.19.**  $(6, 5) - Jaula$ 

La única  $(6, 5) - Jaula$  es el complemento de una Gráfica de Petersen dentro de la Gráfica de Hoffman-Singleton (ver [50]) y  $n(6, 5) = 40$ .

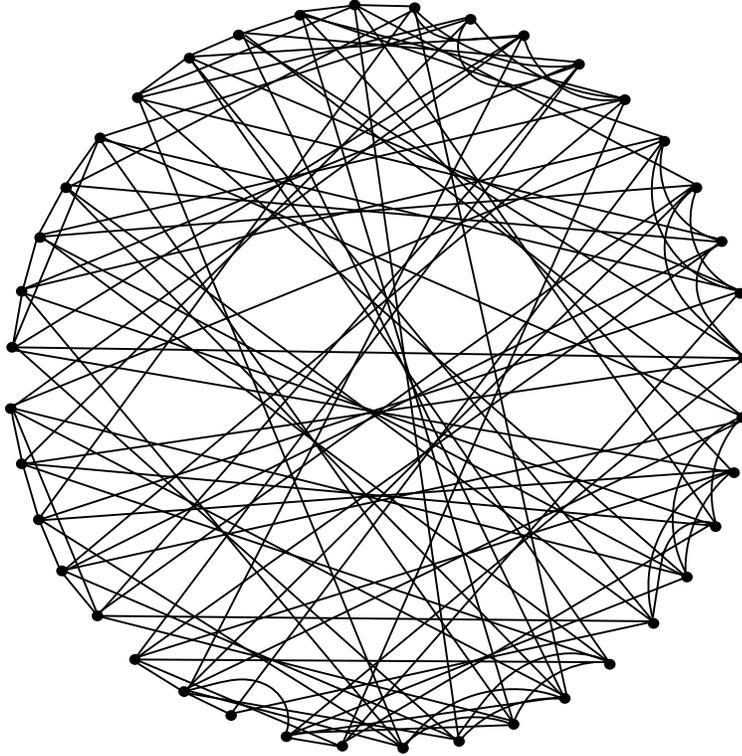


Figura 2.31:  $(6, 5) - Jaula$

**2.3.20.**  $(7, 5) - Jaula$ : Gráfica de Hoffman-Singleton

La Gráfica de Hoffman-Singleton es la  $(7, 5) - Jaula$ , que tiene las características de ser  $7 - regular$  de diámetro 2 y cuello 5, tiene 50 vértices y 175 aristas, esta gráfica es construida por Alan J. Hoffman y Robert R. Singleton (ver [37]) demostró que es única, además es una Gráfica de Moore.

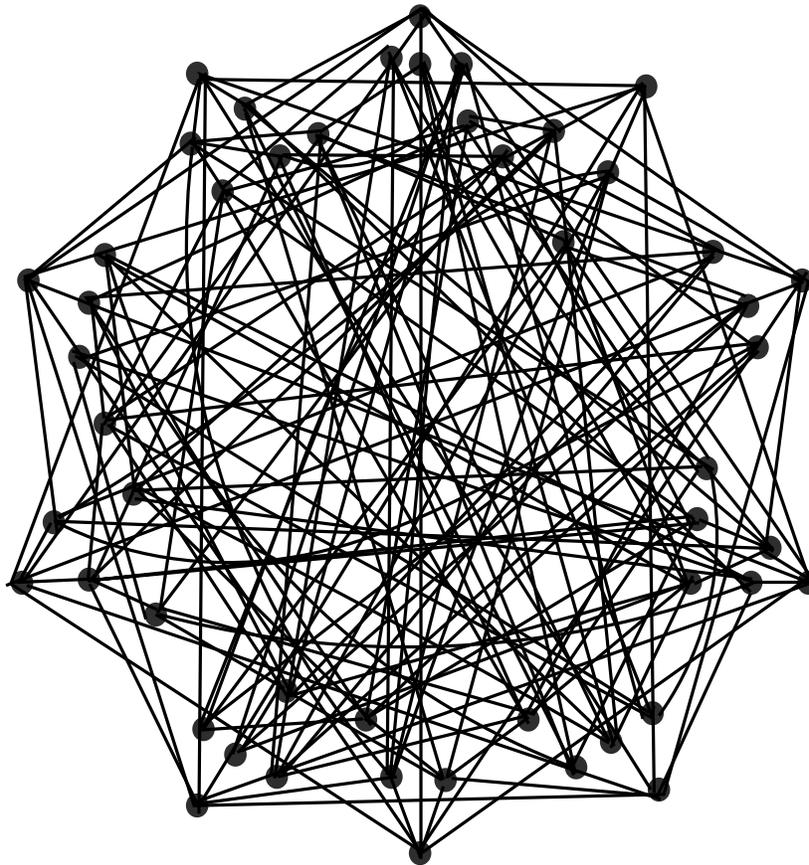


Figura 2.32: Gráfica de Hoffman-Singleton

### 2.3.21. $(7, 6)$ – Jaula

Una  $(7, 6)$  – Jaula, es 7 – regular de diámetro 2 y cuello 6, tiene 90 vértices (ver [48]).

*Para concluir, en el siguiente cuadro presentamos algunas de las  $(k, g)$ –Jaulas más conocidas, su nombre o referencia, así como su orden.*

n(k,g)	Orden	Nombre de la Jaula o Referencia
(3,3)	4	Gráfica completa $K_4$
(3,4)	6	Gráfica bipartita completa $K_{3,3}$
(3,5)	10	Gráfica Petersen (ver [51])
(3,6)	14	Gráfica Heawood (ver [63])
(3,7)	24	Gráfica McGee (ver [46])
(3,8)	30	Gráfica Tutte-Coxeter (ver [61])
(3,9)	58	Gráfica Biggs y Hoare (ver [15])
(3,10)	70	Gráfica Balaban (ver [8])
(3,11)	112	Gráfica Balaban (ver [7])
(3,12)	126	Gráfica Benson (ver [13])
(4,3)	5	Gráfica completa $K_5$
(4,4)	8	Gráfica bipartita completa $K_{4,4}$
(4,5)	19	Gráfica Robertson (ver [54])
(4,6)	26	Gráfica Wong (ver [65])
(4,7)	67	Gráfica Exoo (ver [53])
(4,8)	80	Royle (ver [55])
(4,12)	728	Royle (ver [55])
(5,3)	6	Gráfica completa $K_6$
(5,4)	10	Gráfica bipartita completa $K_{5,5}$
(5,5)	30	Gráfica Fosteres (ver [41], [24])
(5,6)	42	Royle (ver [55])
(5,7)	-	Royle (ver [55])
(5,8)	170	Royle (ver [55])
(5,12)	2730	Royle (ver [55])
(6,3)	7	Gráfica completa $K_7$
(6,4)	12	Gráfica bipartita completa $K_{6,6}$
(6,5)	40	Royle (ver [55])
(6,6)	62	Royle (ver [55])
(6,8)	312	Royle (ver [55])
(6,12)	7812	Royle (ver [55])
(7,3)	8	Gráfica completa $K_8$
(7,4)	14	Gráfica bipartita completa $K_{7,7}$
(7,5)	50	Gráfica Hoffman-Singleton (ver [37])
(7,6)	90	Royle (ver [55])
(8,8)	-	Royle (ver [55])
(9,8)	-	Royle (ver [55])
(10,8)	-	Royle (ver [55])
(12,8)	-	Royle (ver [55])
(14,6)	-	Royle (ver [55])
(14,8)	-	Royle (ver [55])

Cuadro 2.1: Orden de las (k,g)-Jaulas

# 3. GRÁFICAS GEOMÉTRICAS

Los problemas de las Gráficas de Moore y de las Jaulas pertenecen a la Teoría de gráficas extremales y están íntimamente relacionados. Los problemas de mayor interés son cuando se combinan ambos problemas. Por ejemplo, cuando  $G = 2D$ , el problema en las Gráficas de Moore consiste en la búsqueda de los llamados Polígonos Generalizados, se sabe que los polígonos generalizados existen sólo para cuello  $g$  igual a 4, 6, 8 y 12, y se han construido algunos de ellos, concretamente para valores de grado máximo  $\Delta$  y la potencia prima más uno.

## 3.1. Estructura de Incidencia

Las Gráficas Geométricas se basan en los Polígonos Generalizados. Los Polígonos Generalizados fueron introducidos por J. Tits en el apéndice de el famoso artículo (ver [60]) y ahora es una parte integral de la geometría de incidencia, cuyas gráficas de incidencia forman tres familias infinitas de *Jaulas* de cuello 6, 8 y 12.

**Definición 3.1.1.** *Una Geometría de Incidencia o Geometría Parcial (finita) es una Estructura de Incidencia que consta de un conjunto  $P$  de puntos, un conjunto  $L$  de líneas (disjuntas de  $P$ ), y una relación  $I \subseteq P \times L$ , llamada incidencia.*

Si  $(p, L) \in I$ , entonces decimos que el punto  $p$  y la línea  $L$  son incidentes.

**Definición 3.1.2.** Si  $O = (P, L, I)$  es una estructura de incidencia, entonces su estructura de incidencia dual está dada por  $O^* = (P, L, I^*)$ , donde  $O^* = \{(L, P) | (p, L) \in I\}$ .

Informalmente, esto simplemente corresponde a intercambiar los nombres de puntos y líneas.

Las Geometrías Parciales fueron introducidas por R.C. Bose (ver [20]).

**Definición 3.1.3.** Sean  $e$  y  $f$  elementos de  $O$  definimos un Plano de Incidencia como una Geometría de Incidencia cuyo conjunto de objetos es la unión disjunta de dos conjuntos  $P$  y  $L$  tal que para todo  $e, f \in P$  o  $e, f \in L$ ,  $(e, f) \in I$  sólo si  $e = f$ .

**Definición 3.1.4.** Una Gráfica de Incidencia  $X(O)$  de una estructura de incidencia  $O$ , es una gráfica con su conjunto de vértices en  $P \cup L$ , donde dos vértices son adyacentes si y sólo si estos son incidentes.

**Nota 3.1.5.** Las Gráficas de Incidencia de una Estructura de Incidencia son bipartitas.

**Definición 3.1.6.** Un Polígono Generalizado o  $n$ -gon con  $n \geq 2$ , es una estructura de incidencia cuya gráfica de incidencia tiene diámetro  $n$  y cuello  $2n$ .

Un 3-gon (triángulo) generalizado es equivalente a un plano proyectivo posiblemente degenerado.

Los cuadriláteros generalizados son una generalización del 4-gon.

Un  $n$ -gon Generalizado satisface el axioma siguiente.

**Axioma 3.1.7. para  $n$ -gon o Polígono Generalizado (PG)**

*PG1; Existen  $s \geq 1$  y  $t \geq 1$  tal que cada línea es incidente a  $s + 1$  puntos, y cada punto es incidente a  $t + 1$  líneas.*

*PG2; Cualesquiera dos líneas distintas se intersecan en un punto como máximo y una línea se encuentra entre dos puntos distintos.*

*PG3; El diámetro de la Gráfica de Incidencia  $X(O)$  es  $n$ , el cuello  $2n$ .*

Un polígono generalizado es un  $n$ -gon generalizado, para un entero  $n \geq 2$ . Tenemos en cuenta que una gráfica bipartita de diámetro  $n$  que contiene un ciclo tiene un cuello como máximo  $2n$ . Por lo tanto, los polígonos generalizados corresponden a gráficas bipartitas no árboles de un diámetro dado y un cuello máxima, las llamadas gráficas bipartitas de Moore (ver [35]).

## 3.2. Las Gráficas de Incidencia de los Planos Projectivos

Cuando  $k - 1$  es una potencia prima las  $(k, 6)$  - *Jaulas* son las Gráficas de incidencia de los Planos Projectivos.

**Definición 3.2.1.** *Un Plano Projectivo es una geometría de orden  $n$  la cual tiene  $n^2 + n + 1$  puntos, que satisface el axioma siguiente (denotado como  $PG(2, n)$ ).*

**Axioma 3.2.2. para Planos Projectivos (PP)**

*PP1; Dos puntos distintos están conectados en una única línea.*

*PP2; Dos líneas distintas se entrecruzan en un punto único.*

*PP3; Cada punto tiene  $n + 1$  líneas.*

*PP4; Cada línea tiene  $n + 1$  puntos.*

**Ejemplo 3.2.3.** En la figura 3.33 se aprecia el Plano de Fano el cual denotaremos como  $PG(2,2)$ , satisface el axioma 3.2.2 con  $n = 2$  y tiene  $2^2 + 2 + 1 = 7$  puntos.

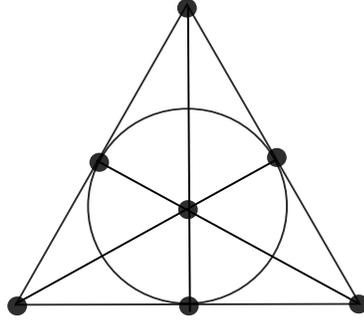


Figura 3.33: Plano de Fano  $PG(2,2)$

**Nota 3.2.4.** La gráfica de incidencia de un plano proyectivo de orden  $n$ , es regular de grado  $n + 1$ , tiene  $2(n^2 + n + 1)$  vértices, diámetro 3 y cuello 6.

**Observación 3.2.5.** Dado que el Límite de Moore de grado  $n + 1$  y cuello 6 es igual al orden de esta gráfica, la gráfica de incidencia de un plano proyectivo es una  $(n + 1, 6)$ -Jaula.

Un claro ejemplo es la  $(3, 6)$ -Jaula (Gráfica de Heawood) que es la gráfica de incidencia de el plano de orden 2.

### 3.3. Gráficas de Incidencia de Cuadriláteros Generalizados

Los Cuadriláteros Generalizados fueron introducidos por J. Tits (ver [60]). Un Cuadrilátero Generalizado es un Polígono Generalizado de orden 4.

**Definición 3.3.1.** *Un Cuadrilátero Generalizado finito de orden  $(s, t)$ , contiene  $s + 1$  puntos en cada línea y tiene  $t + 1$  líneas a través de cada punto, es decir tiene  $(s + 1)(st + 1)$  puntos y  $(t + 1)(st + 1)$  líneas.*

Los Cuadriláteros Generalizados satisfacen el siguiente axioma.

**Axioma 3.3.2. para Cuadriláteros Generalizados (CG)**

*CG1; Dos puntos distintos se encuentran en a lo más una línea.*

*CG2; Dada una línea  $\ell$  y un punto  $p$  no en  $\ell$ , hay exactamente una línea  $k$  a través de  $p$  que interseca a  $\ell$  (en algún punto  $q$ ).*

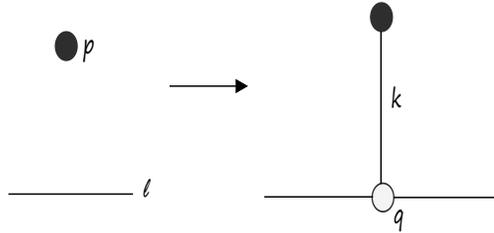


Figura 3.34:

**Ejemplo 3.3.3.** *El Cuadrilátero regular es un Cuadrilátero Generalizado de orden  $(1, 1)$  ( $CG(1, 1)$ ).*

*Así  $CG(1, 1)$  tiene 4 vértices y 4 líneas, como se ve en la figura 3.35. Cuando tiene orden  $(n, 1)$  es cuadrícula.*



líneas del cuadrilátero están representadas por los 5 lados del Pentágono, las 5 diagonales y los 5 círculos parciales.

**Nota 3.3.7.** *El Cuadrilátero Generalizado de orden  $(4, 2)$  ( $CG(4, 2)$ ), es la única  $CG(4, 2)$ .*

### 3.4. Gráficas de Incidencia de Hexágonos Generalizados

Un Hexágono Generalizado es un Polígono Generalizado de orden 6. Un hexágono generalizado finito de orden  $(s, t)$  es una estructura de incidencia, que satisface el siguiente axioma.

**Axioma 3.4.1. para Hexágonos Generalizados (HG)**

*HG1; Cada elemento de  $P$ , que se llaman puntos, es incidente con  $1 + t$  elementos de  $L$ , que son las líneas, para  $t \geq 1$  y cada línea es incidente con  $1 + s$  puntos para  $s \geq 1$ .*

*HG2;  $|P| = (1 + s)(1 + st + s^2t^2)$  y  $|L| = (1 + t)(1 + st + s^2t^2)$ .*

*HG3; 6 es el número entero positivo más pequeño,  $k$  tal que  $O$  tiene un ciclo que consta de  $k$  puntos y  $k$  líneas.*

**Ejemplo 3.4.2.** *Un Hexágono Generalizado  $HG(1, 2)$ , es una gráfica que consta de 14 vértices como se puede ver en la figura 3.37, es isomorfa a la Gráfica Heawood.*

Otros ejemplos son;

La  $HG(1, 3)$ , es una  $(4, 6)$ -jaula.

La  $HG(1, 4)$ , es una  $(5, 6)$ -jaula.

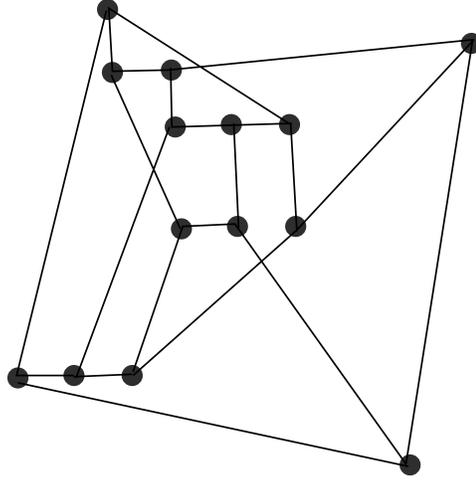
La  $HG(1, 5)$ , es una  $(6, 6)$ -jaula.

La  $HG(1, 6)$ , es una  $(7, 6)$ -jaula.

La  $HG(1, 7)$ , es una  $(8, 6)$ -jaula.

La  $HG(1, 8)$ , es una  $(9, 6)$ -jaula.

La  $HG(1, 9)$ , es una  $(10, 6)$ -jaula.

Figura 3.37:  $HG(1, 2)$ 

La  $HG(2, 1)$ , es la Gráfica Bouwer  $B(2, 3, 7)$ .

**Observación 3.4.3.** *La Gráfica de Incidencia de un Hexágono Generalizado de orden  $(q, q)$  tienen  $2(q^3 + 1)(q^2 + q + 1)$  vértices y es regular de grado  $q + 1$ , diámetro 6 y cuello 12. El orden de estas gráficas coincide con el Límite de Moore para el grado  $q+1$  y cuello 12, y por lo tanto son Jaulas.*

# 4. RESULTADOS GENERALES EN JAULAS

En este capítulo desarrollamos algunos de los resultados más importantes sobre Jaulas.

**Teorema 4.1.** *Sea  $G$  una  $(k, g)$ -Gráfica, entonces  $|V(G)| \geq n(k, g)$ , donde*

$$n(k, g) \geq \begin{cases} 1 + k[(k-1)^{\frac{g-1}{2}} - 1]/(k-2), & \text{si } g \text{ es impar;} \\ 2[(k-1)^{\frac{g}{2}} - 1]/(k-2), & \text{si } g \text{ es par.} \end{cases}$$

*Demostración:* Sea  $G$  una  $(k, g)$ -Gráfica donde  $D$  es el diámetro de  $G$ , la demostración sera en dos casos.

i) Supongamos que  $g$  es impar.

Sea  $g = 2D + 1$  ( $D \geq 1$ ). Entonces consideramos a lo más  $D$  vértices adyacentes a  $v$ , donde  $v$  es un vértice fijo, como se aprecia en la figura 4.38(a), consideramos a  $k \geq 4$  y  $g \geq 5$ , puesto que no hay ciclos más pequeños que  $g$ . En el primer nivel hay un vértice  $v$ , en el segundo nivel hay  $k$  vértices, en el tercer nivel  $k(k-1)$ , en el cuarto nivel  $k(k-1)^2$  y así sucesivamente hasta el nivel  $D$ -ésimo. Por lo tanto :

$$\begin{aligned} |V(G)| &\geq 1 + k + k(k-1) + k(k-1)^2 + \dots + k(k-1)^{D-1} \\ &= 1 + k[(k-1)^D - 1]/(k-2) \\ &= 1 + k[(k-1)^{\frac{g-1}{2}} - 1]/(k-2) \end{aligned}$$

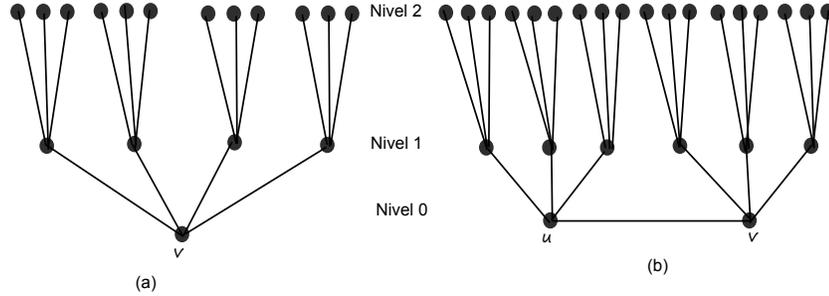


Figura 4.38:

ii) Supongamos que  $g$  es par.

Sea  $g = 2D$  ( $D \geq 2$ ). Elegimos una arista  $uv$ , luego consideramos los vértices en la mayor de las distancias  $D - 1$  de cualquiera de los dos vértices  $v$  y  $u$ , como se muestra en la figura 4.38(b), y repetimos el mismo argumento de i), así;

$$\begin{aligned}
 |V(G)| &\geq 2 + 2(k - 1) + 2(k - 1)^2 + \dots + 2(k - 1)^{D-1} \\
 &= 2[(k - 1)^D - 1]/(k - 2) \\
 &= 2[(k - 1)^{\frac{g}{2}} - 1]/(k - 2)
 \end{aligned}$$

■

**Teorema 4.2.** *Existe  $G$  una Gráfica de Moore de grado  $k$  y cuello  $g$  tal que;*

- (i) *Si  $k = 2$  y  $g \geq 3$ , entonces  $G$  es un Ciclo*
- (ii) *Si  $k \geq 2$  y  $g = 3$ , entonces  $G$  es una Gráfica Completa*

*Demostración:* Sea  $G$  una  $(k, g)$ -Gráfica de Moore, por la observación 2.2.5, tenemos que es una  $(k, g)$ -Jaula.

(i). Sea  $J$  una  $(2, g)$ -Jaula, así  $J$  es 2-regular y de cuello  $g$ , defino a  $C$  como el ciclo de longitud mínima en  $J$ ,  $C$  tiene longitud  $g$  con lo cual  $|V(C)| = g$ . Basta ver que  $|V(J)| = |V(C)|$ .

Supongamos que  $|V(J)| \neq |V(C)|$ .

Si  $|V(J)| < |V(C)|$ , no puede pasar pues  $C$  es subgráfica de  $J$ .

Si  $|V(J)| > |V(C)|$ , existe  $u \in V(J)$  tal que  $u \notin V(C)$ , como  $J$  es conexa entonces existe  $T_1$  una  $uw$ -trayectoria con  $w \in V(C)$  por lo tanto existe  $z \in V(T_1)$  y  $z \in V(C)$ , así considero  $T_2$  una  $uz$ -trayectoria tal que  $gr_C(z) = 2$  pero al menos existe una arista que llega a  $z$ , entonces  $gr_J(z) = gr_C(z) + gr_{J/C}(z) > 2$  ya que  $gr_{J/C}(z) > 1$  lo cual es una contradicción ya que  $J$  es 2-regular con lo cual tenemos que  $|V(J)| = |V(C)|$ .

Por lo tanto  $J$  es un  $g$ -ciclo.

(ii). Sea  $M$  una Gráfica de Moore, regular de grado  $k$  y cuello 3 y además por ser de Moore alcanza la cota de Moore es decir tiene como máximo  $m$  vértices y como logra este límite tiene cuello  $g = 2D + 1$  así,  $D = 1$ . Además  $|V(M)| = M = 1 + k$ , diámetro es 1 y  $|V(M)| = 1 + k$  con lo cual entre cada par de vértices hay una arista que los une, por lo tanto  $M$  es una Gráfica Completa.

■

**Teorema 4.3** (ver [30]). *Para cada  $k \geq 2$ ,  $g \geq 3$ .*

$$n(k, g) \leq 4 \sum_{t=1}^{g-2} (k-1)^t \quad (4.1)$$

**Teorema 4.4** (ver [33]). *Dados  $k, g \geq 3$ , entonces existe una Gráfica regular con cuello al menos  $g$ .*

**Teorema 4.5.** *Supongamos que  $g \geq 3$ . Sea  $C(k, g) = \{ G : G \text{ es una } (k, \gamma)\text{-Gráfica, } \gamma \geq g \}$ . Entonces;*

(i)  $n(k, g) = \min\{|V(G)| : G \in C(k, g)\}$ ;

(ii) Si  $G \in C(k, g)$  y  $|V(G)| = n(k, g)$  entonces  $G$  es una  $(k, g)$ -Jaula.

*Demostración:* (i) Suponemos que  $G \in C(k, g)$  y  $|V(G)| = \min\{|V(G)| : G \in C(k, g)\}$ . Entonces  $G$  es una  $(k, \gamma)$ -Gráfica,  $\gamma \geq g$ .

Suponemos que  $\gamma = g$ .

Entonces  $G$  es una  $(k, g)$ -Gráfica, puesto que todas las  $(k, g)$ -Gráficas están en  $C(k, g)$  y tenemos que  $n(k, g) = |V(G)|$  con lo que está hecho.

(ii) Si  $g = 3$  entonces es una  $(k, 3)$ -Gráfica es decir es una  $K_{k+1}$  (gráfica completa), entonces  $K_{k+1} \in C(k, 3)$  y  $n(k, 3) = k + 1$ . Por lo tanto  $K_{k+1}$  es

la única  $(k, 3)$ -Jaula.

Así que ahora asumimos que  $g > 3$ . Supongamos que  $k$  es par.

Sea  $u \in V(G)$  y sea  $G^*$  la gráfica tal que  $V(G^*) = V(G) \setminus \{u\}$  y las aristas consistentes de la unión de  $A(G \setminus \{u\})$ , junto con un conjunto arbitrario de aristas independientes  $(gr_G u)/2$  uniendo pares de vértices de la vecindad de  $u$  en  $G$  ( $N_G(u)$ ). Notemos que  $G^*$  no tiene aristas múltiples y  $G$  no tiene ciclos de longitud 3. Además  $G^*$  es  $r$ -regular y  $|V(G^*)| < |V(G)|$ ,  $\gamma(G^*) < g$ .

Sea  $C$  un ciclo en  $G^*$  de orden menor que  $g$ . Este ciclo debe contener algunas de las nuevas aristas introducidas por la vecindad de  $u$ . Sea  $v_i w_i, i = 0, 1, 2, \dots, t-1, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}k$ , siendo las nuevas aristas de  $C$  y el conjunto  $A_i$  es el subconjunto de  $C$  uniendo  $w_i$  a  $v_{i+1}$ , considerando los subíndices modulo  $t$ .

No hay pérdida de generalidad al asumir que el ciclo inicia desde  $w_i$  a través de  $A_i$  hacia  $v_{i+1}$  en caso contrario re-etiquetamos.

Ahora en  $G$ ,  $A_i$  junto con  $uw_i$  y  $wv_{i+1}$ , forman un ciclo de longitud por lo menos  $g$ . Por lo tanto  $|A(A_i)| \geq g - 2$ . Si

$$g > |A(C)| \geq t(g - 2) + t = t(g - 1)$$

Lo que satisface que  $t = 1$  y  $|A(A_0)| = g - 2$ , entonces  $uv_0$  y  $wv_0$  junto con  $A_0$  están en un ciclo de orden  $g$ .

Supongamos que  $k$  ( $k \geq 5$ ) es impar. Entonces este argumento es similar al del caso anterior.

Elegimos una arista  $uv \in A(G)$ . Sea  $G^*$  una gráfica con  $V(G^*) = V(G) \setminus \{u, v\}$  y la arista consistente de la unión de  $A(G \setminus \{u, v\})$ , siempre con un conjunto arbitrario aristas independientes  $\frac{1}{2}(gr(u) - 1)$  de elementos de  $N_G(u) \setminus \{v\}$  en pares, y un conjunto arbitrario aristas independientes  $\frac{1}{2}(gr(v) - 1)$  de elementos de  $N_G(v) \setminus \{u\}$  en pares.

De nuevo  $G^*$  debe contener un ciclo  $C$  de orden menor que  $g$ .  $A_i$  es un subconjunto de  $C$  tenemos como primer vértice  $w_i \in N_G(u) \setminus \{v\}$  y como vértice final  $v_{i+1} \in N_G(v) \setminus \{u\}$ . En este caso tenemos la garantía de que  $|A(A_i)| \geq g - 3$  si

$$g > |A(C)| \geq t(g - 3) + t = t(g - 2)$$

lo que satisface que  $t = 1$  y  $|A(A_0)| \in \{g - 3, g - 2\}$ . Ahora  $A_0$  es una  $w_0v_0$ -trayectoria. Así sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $w_0, v_0 \in N_G(u) \setminus \{v\}$  en el caso  $A_0$ , asumimos que  $uw_0$  y  $uv_0$  están en el ciclo de orden  $g$ . ■

**Teorema 4.6.** *Para cada  $k \geq 2$  y  $g \geq 3$*

$$n(k, g) < n(k, g + 1). \quad (4.2)$$

*Demostración:* Supongamos que  $G$  es una  $(k, g + 1)$ -jaula. Entonces  $G \in C(k, g)$ , entonces  $n(k, g) \leq |V(G)| = n(k, g + 1)$ , donde  $C(k, g) = \{G : G \text{ es una } (k, \gamma)\text{-gráfica, } \gamma \geq g\}$ . Si  $n(k, g + 1) = n(k, g)$ , entonces  $|V(G)| = n(k, g)$  por el Teorema 4.5,  $G$  es una  $(k, g)$ -Jaula. Esto es imposible ya que  $\gamma(G)$  es única ( $\gamma(G)$ , es el cuello de  $G$ ). Por lo tanto  $n(k, g) < n(k, g + 1)$ . ■

**Teorema 4.7.** *Para cada  $k \geq 3$  y  $g \geq 3$  con  $g$  impar*

$$n(k, g + 1) \leq 2n(k, g). \quad (4.3)$$

*Demostración:* Sea  $G$  una  $(k, g)$ -jaula con  $V(G) = \{u_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ . Definimos a  $B$  una gráfica bipartita, con  $V(B) = \{u_i, v_i : i = 1, 2, \dots, n\}$  y  $A(B) = \{u_i v_j : u_i u_j \in A(G), 1 \leq i, j \leq n\}$ .

Entonces  $|V(B)| = 2|V(G)|$  y  $B$  es  $k$ -regular. Además para  $t$  impar,  $(u_1, u_2, \dots, u_t, u_1)$  es un  $t$ -ciclo en  $G$ , si y solo si  $(u_1, v_2, u_3, \dots, u_t, v_1, u_2, \dots, v_t, u_1)$  es un  $2t$ -ciclo en  $B$ . Ahora si  $t$  es par,  $(v_1, v_2, \dots, v_t, v_1)$  es un  $t$ -ciclo en  $G$  si y solo si  $(u_1, v_2, u_3, \dots, v_t, u_1)$  y  $(v_1, u_2, v_3, \dots, u_t, v_1)$  es un  $t$ -ciclo en  $B$ . Solo si  $G$  contiene a un ciclo de orden  $g + 1$ , entonces  $g$  es impar,  $B$  contiene un ciclo de orden  $g + 1$ , en este caso  $\gamma(B) \geq g + 1$ , dado que cualquier ciclo de  $G$  de orden  $g$  corresponde a un ciclo de orden  $2g$  en  $B$  y un ciclo de orden  $s \geq g + 2$  corresponde a un ciclo de orden al menos  $s$ . Así  $B$  es una  $(k, s)$ -Gráfica para algún  $s \geq g + 1$ , por lo tanto por el Teorema 4.6.

$$2n(k, g) = 2|V(G)| = |V(B)| \geq n(k, g) \geq n(k, g + 1). \quad (4.4)$$

■

**Teorema 4.8** (ver [58]). *Para cada  $k \geq 2$  y  $g \geq 3$  con  $g$  impar*

$$n(k, g) \leq \begin{cases} 2(k-2)^{g-2}, & \text{si } g \text{ es impar;} \\ 4(k-1)^{g-3}, & \text{si } g \text{ es par.} \end{cases}$$

**Teorema 4.9.** *El número más pequeño posible de vértices para el cual una  $(3, g)$ -Jaula con cuello  $g$  impar, puede existir es  $3 \cdot 2^{(g-1)/2} - 2$ .*

*Demostración:* Sea  $T$  un árbol de distancia de la gráfica  $G$  con cuello impar  $g$ .

En el primer nivel de  $T$ , hay un vértice, digamos  $v_0$ . Como todos los vértices son 3-regulares, hay tres vértices adyacentes a  $v_0$ . Por lo tanto, en el nivel 1 de  $T$ , hay tres vértices. Sin embargo, en el nivel 2 de  $T$ , hay dos vértices adyacentes al mismo vértice en el nivel 1, ya que cada vértice es 3-regular. Por lo tanto, hay un total de  $3 \cdot 2$  vértices en el nivel 2 de  $T$ . En general, hay  $3 \cdot 2^{i-1}$  vértices en el nivel  $i$  de  $T$ .

Dado que el cuello  $g$  es impar, esto significa que dos vértices en el mismo nivel de distancia desde  $v_0$  sean adyacentes, y por lo tanto, estarán en el mismo nivel del primero, esta distancia es  $(g-1)/2$ . Así

$$\begin{aligned} n(3, g) &= 1 + 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^{(g-1)/2-1} \\ &= 1 + 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^{(g-3)/2} \\ &= 1 + 3(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{(g-3)/2}) \\ &= 1 + 3(2 \cdot 2^{(g-3)/2}) \\ &= 1 + 3(2^{(g-1)/2} - 1) \\ &= 3 \cdot 2^{(g-1)/2} - 2 \end{aligned}$$

■

**Teorema 4.10.** *El número más pequeño posible de vértices para el cual una  $(3, g)$ -Jaula con cuello  $g$  par puede existir es  $2^{(g+2)/2} - 2$ .*

*Demostración:* Sea  $T'$  un árbol de distancia modificado para que dos vértices adyacentes,  $v_0$  y  $v_1$ , se coloquen en el primer nivel de raíz del árbol  $T'$ . Como  $g$  es par, existen dos vértices adyacentes  $u_0, u_1$  en el mismo nivel de distancia del par  $v_0$  y  $v_1$ , pero necesariamente provienen de diferentes

niveles y  $d(v_0, u_0) = d(v_1, u_1) = (g - 2)/2$ . Así

$$\begin{aligned}n(3, g) &= 2 + 2^2 + \dots + 2^{(g-2)/2} \\&= 2(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{(g-2)/2}) \\&= 2\left(\frac{1 - 2^{(g-2)/2+1}}{1 - 2}\right) \\&= 2(2^{(g-2)/2+1} - 1) \\&= 2^{(g+2)/2} - 2\end{aligned}$$

■



# 5. LÍMITES INFERIORES DE JAULAS

En este capítulo es de gran interés el conocer las  $(k, g)$ –Gráficas con un *exceso* pequeño, esta definición fue introducida en 1996 por Biggs (ver [18]).

Denotaremos como  $n(k, g)$  al orden de una  $(k, g)$ –Gráfica de grado  $k \geq 2$  y cuello  $g \geq 3$ .

**Definición 5.0.1.** *Sea  $G$  una gráfica  $k$ -regular con cuello  $g$ ,  $G$  debe tener orden al menos;*

$$n_1(k, g) = \begin{cases} \frac{k(k-1)^{(g-1)/2} - 2}{k-2}, & \text{si } g \text{ es impar;} \\ \frac{2(k-1)^{g/2} - 2}{k-2}, & \text{si } g \text{ es par.} \end{cases}$$

a  $n_1(k, g)$  se le conoce como el Límite de Moore y se denotara como  $M(k, g) = n_1(k, g)$ .

**Definición 5.0.2.** *La diferencia  $n(k, g) - n_1(k, g)$  es una relación muy estudiada, usualmente denotada por  $e(k, g)$  y llamada exceso.*

**Observación 5.0.3.** *Un  $(k, g)$ –Jaula que tiene  $n(k, g) = n_1(k, g)$  vértices (exceso  $e = 0$ ) se llama Gráfica de Moore (ver [17]).*

**Ejemplo**

Notemos que la  $(3, 7) - \text{Jaula}$  o Gráfica de McGee es de orden 24 es decir,  $24 = n(3, 7)$  y para poder calcular el *exceso* veamos que ;

$$M(3, 7) = n_1(3, 7) = \frac{3(3-1)^{(7-1)/2} - 2}{3-2} = 22$$

$$e(3, 7) = n(3, 7) - n_1(3, 7) = 24 - 22 = 2$$

es decir  $e(3, 7) = 2$  así el Límite Inferior para el orden de la  $(3, 7) - \text{Jaula}$  es el valor del Límite de Moore más dos,  $M(3, 7) + 2$ .

Fuera de los casos donde se afirma la existencia de las Gráficas de Moore, el Límite inferior para el orden de una  $(k, g) - \text{Jaula}$  es el valor del límite de Moore más uno,  $M(k, g) + 1$ , cuando  $k$  es par, y el valor del límite de Moore más dos,  $M(k, g) + 2$ , cuando  $k$  es impar.

Estos límites inferiores mejorados no difieren significativamente del límite de Moore,  $M(k, g)$ .

Así para cualquier valor dado  $k$  y  $g$  es posible construir una gráfica regular.

Por lo tanto, el número

$$\min = \{e \mid \exists G \text{ con cuello } g, \text{ grado } k, \text{ exceso } e\}$$

se define para cada  $k$  y  $g$ .

**5.1. Teorema de la Bipartición**

Comenzaremos por introducir alguna notación, basada en la descomposición estándar de una gráfica  $G$  de cuello  $2r$ , esta notación es introducida por Biggs (ver [18]).

Elegimos una arista  $(\sigma, \tau)$  de  $G$  y definimos  $0 \leq i \leq r - 1$

$$S_i = \{\alpha \in V(G) \mid \partial(\sigma, \alpha) = i, \partial(\tau, \alpha) = i + 1\},$$

$$T_i = \{\alpha \in V(G) \mid \partial(\sigma, \alpha) = i + 1, \partial(\tau, \alpha) = i\}.$$

El hecho de que el cuello de  $G$  sea  $2r$  implica que los conjuntos  $S_i$  y  $T_i$  ( $0 \leq i \leq r-1$ ) son mutuamente disjuntos y como  $G$  es regular de grado  $k$  se tiene  $|S_i| = |T_i| = (k-1)^i$ .

Sea  $X$  el conjunto de vértices definido de la siguiente manera;

$$X = \{\alpha \in V(G) \mid \partial(\sigma, \alpha) \geq r \text{ y } \partial(\tau, \alpha) \geq r\}$$

$X$  es el *exceso* establecido con respecto de  $\{\sigma, \tau\}$  y su cardinalidad es  $e$ , el *exceso* de  $G$ .

**Nota 5.1.1.** Usualmente debemos especificar  $\{\sigma, \tau\}$  y escribir  $X_{\sigma\tau}$  por  $X$ .

Puesto que el cuello de  $G$  es  $2r$ , no hay aristas con ambos extremos en  $S_i$  o ambos extremos en  $T_i$  ( $0 \leq i \leq r-1$ ) y además sin aristas uniendo  $T_i$  a  $S_i$  ( $0 \leq i \leq r-2$ ), sin embargo habrá algunas aristas uniendo  $S_{r-1}$  a  $T_{r-1}$  y puede haber aristas uniendo  $X$  a  $S_{r-1}$ ,  $X$  a  $T_{r-1}$  y aristas con ambos extremos en  $X$ .

**Ejemplo 5.1.2.** Sea  $G$  la  $(3, 4)$ -Gráfica presente en la figura 5.39,  $G$  es tal que  $|V(G)| = 12$  y con cuello  $g = 4$  así  $r = 2$ , además  $0 \leq i \leq r-1$ .

Consideremos  $(\sigma, \tau) \in A(G)$  con  $\sigma = v_6$  y  $\tau = v_5$ , así  $X_{v_6, v_5}$ .

Con lo cual se define  $S_0 = \{v_6\}$  y  $S_1 = \{v_{11}, v_2\}$  y por otro lado  $T_0 = \{v_5\}$  y  $T_1 = \{v_8, v_9\}$  así  $|S_i| = |T_i| = (k-1)^i$ .

Por lo tanto  $X = \{v_1, v_3, v_4, v_7, v_{10}, v_{12}\}$  con lo cual  $e(3, 4) = |V(G)| - \frac{2(2)^2 - 2}{1} = 6$ .

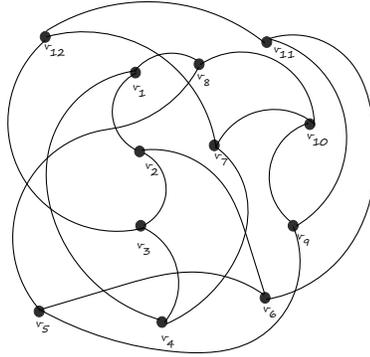


Figura 5.39:  $(3, 4)$ -Gráfica

**Ejemplo 5.1.3.** Sea  $G$  la  $(3, 6)$ -Gráfica presentada en la figura 5.40,  $G$  es tal que  $|V(G)| = 34$  y con cuello  $g = 6$  así  $r = 3$ , además  $0 \leq i \leq r - 1$ . Consideremos  $(\sigma, \tau) \in A(G)$  con  $\sigma = v_1$  y  $\tau = v_{31}$ , así  $X_{v_1, v_{31}}$ . Con lo cual se define  $S_0 = \{v_1\}$ ,  $S_1 = \{v_2, v_3\}$  y  $S_2 = \{v_8, v_9, v_{14}, v_{30}\}$  y por otro lado  $T_0 = \{v_{31}\}$ ,  $T_1 = \{v_6, v_{32}\}$  y  $T_2 = \{v_7, v_{27}, v_{20}, v_{21}\}$  así  $|S_i| = |T_i| = (k - 1)^i$ . Por lo tanto  $X = V(G) / \{v_1, v_2, v_3, v_8, v_9, v_{14}, v_{30}, v_{31}, v_6, v_{32}, v_7, v_{27}, v_{20}, v_{21}\}$  con lo cual  $e(3, 6) = |V(G)| - \frac{2(2)^3 - 2}{1} = 20$ .

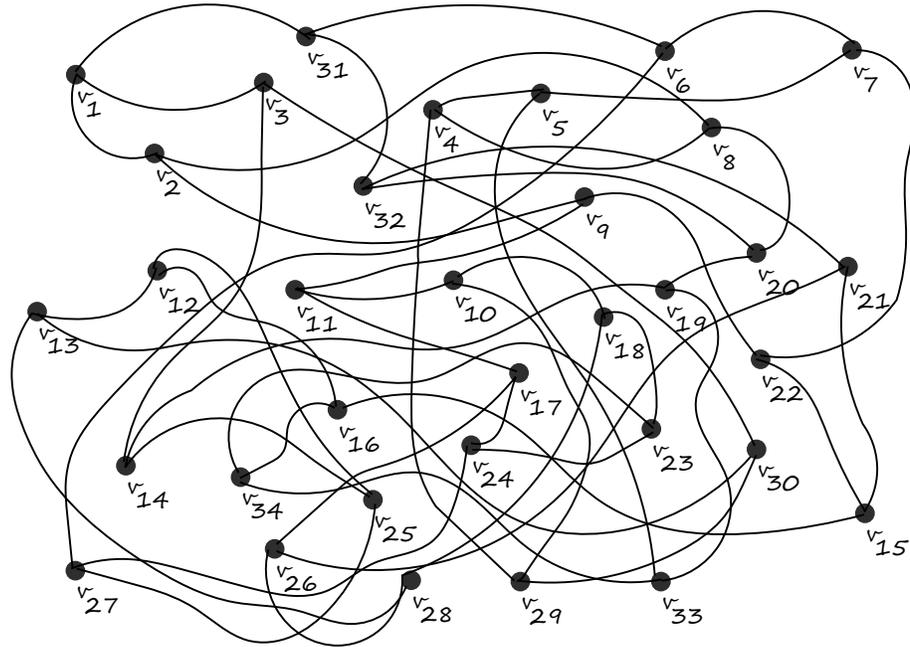


Figura 5.40:  $(3, 6)$ -Gráfica

Para un vértice  $\alpha \in V(G)$  y  $W \subseteq V(G)$ , decimos que  $W$  es el conjunto de vértices adyacentes a  $\alpha$  y se denotara como  $N(W, \alpha)$ , así  $n(W, \alpha) = |N(W, \alpha)|$ .

**Lema 5.1.4** (ver [17]). Supongamos que  $r \geq 3$  y  $\alpha, \beta$  son vértices adyacentes de  $G$ , situados en  $T_{r-1} \cup X$  entonces

$$n(S_{r-1}, \alpha) + n(S_{r-1}, \beta) \leq k - 1.$$

(El mismo resultado se mantiene con  $S_{r-1}$  y  $T_{r-1}$  intercambiados.)

**Lema 5.1.5** (ver [17]). *Supongamos que  $r \geq 3$  y  $\alpha, \beta$  son vértices adyacentes de  $G$ , con  $\alpha \in X$  y  $\beta \in T_{r-1}$  entonces*

$$n(X, \beta) \geq n(S_{r-1}, \alpha).$$

(El mismo resultado se mantiene con  $S_{r-1}$  y  $T_{r-1}$  intercambiados.)

**Teorema 5.1.6** (ver [17]). *Sea  $G$  una  $(k, g)$  – Jaula de cuello  $g = 2r \geq 6$ , grado  $k$ , y exceso  $e$ . Si  $k - 2 \geq e$ , entonces  $G$  es bipartita y su diámetro es  $r + 1$ .*

*Demostración:* Observamos primero que si un vértice en  $X$  tiene todos sus  $k$  vecinos en  $X$  entonces  $e \geq k + 1$ .

Sea  $G$  una  $(k, g)$  – Jaula de cuello  $g = 2r \geq 6$ , grado  $k$ , y exceso  $e$ .

Si  $k - 2 \geq e$  cada vértice en  $X$  debe ser adyacente a algún vértice en  $S_{r-1} \cup T_{r-1}$ .

Supongamos primero que hay un vértice  $u \in X$  adyacente a  $\alpha \in S_{r-1}$  y  $\beta \in T_{r-1}$  entonces  $N(X, u)$ ,  $N(X, \alpha) - \{u\}$ ,  $N(X, \beta) - \{u\}$  y  $\{u\}$  son subconjuntos disjuntos de  $X$  así por lema 5.1.4 tenemos;

$$\begin{aligned} e = |X| &\geq n(X, u) + n(X, \alpha) - 1 + n(X, \beta) - 1 + 1 \\ &= n(X, u) + n(X, \alpha) + n(X, \beta) - 1 \\ &\geq n(X, u) + n(T_{r-1}, u) + n(S - r - 1, u) - 1 \end{aligned}$$

Donde el grado de  $u$  es  $k$  y todos sus vecinos de  $u$  están en  $X$ ,  $T_{r-1}$  o  $S_{r-1}$  así tenemos que  $e \geq k + 1$ , contrariamente a la hipótesis. Por lo tanto, cada vértice en  $X$  es unido a algunos vértices de  $S_{r-1}$  o de  $T_{r-1}$  pero no ambos.

Definimos una partición  $X = X_S \cup X_T$  tal que  $X_S$  y  $X_T$  denotan los subconjuntos de  $X$  que tienen vértices unidos a  $S_{r-1}$  y  $T_{r-1}$  respectivamente.

Supongamos que  $X_S$  contiene dos vértices adyacentes  $u$  y  $v$ . Por definición de  $X_S$ , hay dos vértices  $\alpha$  y  $\beta \in S_{r-1}$  adyacentes a  $u$  y  $v$  respectivamente. Los conjuntos  $N(X, u) - \{v\}$ ,  $N(X, v) - \{u\}$ ,  $\{u\}$  y  $\{v\}$ , son subconjuntos disjuntos de  $X$  y así;

$$\begin{aligned} e = |X| &\geq n(X, u) + n(X, v) - 1 + 2 \\ &= n(X, u) + n(X, v) \end{aligned}$$

Así tenemos

$$\begin{aligned} e &\geq (k - n(S_{r-1}, u)) + (k - n(S_{r-1}, \eta)) \\ &= 2k - (n(S_{r-1}, u) + n(S_{r-1}, v)) \\ &\geq k + 1 \end{aligned}$$

Por lema 5.1.5 lo cual contradice la hipótesis  $k - 2 \geq e$ , por lo que deducimos que  $X_s$  (lo mismo para  $X_T$ ) no contienen pares de vértices adyacentes. Por lo tanto,  $G$  es bipartito, los dos pares consisten en conjuntos alternativos de la forma

$$S_0, S_1, S_2, \dots, \dots, S_{r-1}, X_S, X_T, T_{r-1}, \dots, T_1, T_0$$

Como todos los vértices del *exceso* están en  $X = X_s u X_T$ , entonces el diámetro es  $r + 1$ . ■

Para estos casos supondremos que  $G$  es una gráfica regular con cuello  $g = 2r \geq 6$ , con grado  $k$  y *exceso* 2.

Sea  $n = |V(G)| = n_0 + 2$ , con el teorema anterior y la siguiente observación tendremos que  $G$  es una gráfica bipartita con diámetro  $r + 1$ .

Sea  $A_i$  ( $0 \leq i \leq r + 1$ ) denotamos la matriz de  $n \times n$  cuyas filas y columnas corresponden a los vértices de  $G$  con;

$$(A_i)_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \partial(\alpha, \beta) = i \\ 1 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Sea  $J$  la matriz  $n \times n$  cuyas entradas son todas 1 así;

$$J = A_0 + A_1 + \dots + A_{r+1}$$

las identidades dadas en (i) y (ii) del lema anterior nos permite expresar cada una de las matrices  $A_0, A_1, \dots, A_{r-1}$  a su vez como un polinomio en  $A$  y utilizando (iii) para tratar con  $A_r$  obtenemos

$$kJ = (A + kI)(E_r(A) + A_{r+1})$$

Donde  $\{E_i(x)\}$  es la secuencia de polinomios definidos por recursión:

$$\begin{aligned} E_0(x) &= 0 \\ E_1(x) &= 1 \\ E_i(x) &= xE_{i-1}(x) - (k-1)E_{i-2}(x) \quad (i \geq 2) \end{aligned}$$

**Definición 5.1.7.** La álgebra de adyacencia de una gráfica  $\Gamma$  es la álgebra de polinomios en la matriz de adyacencia  $A = A(\Gamma)$ , que deberá denotar el álgebra de adyacencias de  $\Gamma$  por  $\mathcal{A}(\Gamma)$ .

Ahora estableceremos algunas definiciones.

**Definición 5.1.8.** Una estructura de incidencia (finita) es una tripleta  $D = (X, B, I)$  donde  $X$  y  $B$  son conjuntos finitos no vacíos y  $I \subseteq X \times B$ . Los conjuntos  $X$  y  $B$  son llamados conjunto de puntos y el conjunto de bloques de  $D$  respectivamente, y sus elementos se denominan Puntos y Bloques. El conjunto  $I$  se denomina Relación de Incidencia.

**Definición 5.1.9.** Un  $(v, b, r, k, \lambda)$  diseño es una estructura de incidencia  $D = (X, B, I)$  que satisface las condiciones siguientes:

1.  $|X| = v$
2.  $|B| = b$ .
3.  $R(x) = r$  para todo  $x \in X$ .
4.  $|B| = k$  para todo  $B \in B$ .
5.  $\lambda(x, y) = \lambda$  para todos los distintos  $x, y \in X$ .
6. si  $I = \phi$  o  $I = X \times B$ , entonces  $v = b$ .

El número de bloques incidentes con un punto  $x$  se llama número de replicación de  $x$  y se denota por  $r(x)$  o  $R(x)$ .

Para puntos distintos  $x$  e  $y$ ,  $\lambda(x, y)$  denota el número de bloques incidentes con  $x$  e  $y$ .

Si  $|B| = |X|$ , se dice que el bloque  $B$  está completo.

**Ejemplo 5.1.10.** Sea  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y  $B = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}\}$ . Entonces  $D = (X, B)$  es un diseño  $(6, 10, 5, 3, 2)$ .

## 5.2. Gráficas con cuello 6

Supongamos que  $e \neq 0$  y que  $\langle X \rangle$  denota la subgráfica inducida por vértices en  $X$ .  $\langle X \rangle$  es bipartita y el grado de cada uno de sus vértices es al menos 1 ya que cualquier vértice en  $X$  se une a lo más  $k - 1$  vértices en  $S_2$  o  $T_2$  por lema 5.1.5.

Así  $\langle X \rangle$  tiene por lo menos  $\frac{1}{2}e$  aristas. En el caso cuando  $\langle X \rangle$  tiene solo  $\frac{1}{2}e$  aristas, los vértices de  $e$  se unen en pares y no hay otras uniones. Estos casos sin duda deben suceder cuando  $e = 2$  (he incluso cuando  $k = 3$ ) y es posible que necesariamente ocurre si  $e$  es pequeño comparado con  $k$ .

**Definición 5.2.1.** Un diseño simétrico  $(v, k, \lambda)$  es un conjunto  $P$  de  $v$  puntos y un conjunto  $B$  de  $v$  bloques tal que cada bloque es un  $k$ -subconjunto de  $P$ , y cualquiera dos puntos distintos pertenecen a  $\lambda$  bloques exactamente.

**Observación 5.2.2.** Un diseño simétrico  $(v, k, \lambda)$  es un  $(v, b, r, k, \lambda)$  diseño.

**Ejemplo 5.2.3.** El Plano de Fano es un diseño simétrico  $(7, 3, 1)$ . Como se muestra en la figura 5.41 Ya que  $|X| = 7$ ,  $|B| = 3$  para todo  $B \in B$  y  $\lambda(x, y) = 1$  para todos los distintos  $x, y \in X$ .

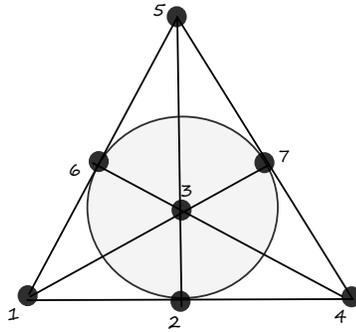


Figura 5.41: Plano de Fano

Así que cualquiera 2 bloques distintos se cruzan en  $\lambda$  puntos comunes, y  $v = (k^2 - k + \lambda)/\lambda$ .

Asociado con un diseño simétrico  $(v, k, \lambda)$  hay una gráfica bipartita cuyos vértices están en  $P \cup B$  y cada arista corresponde a los pares de vértices  $\{p, b\}$  con  $p \in P$  ( $p \in P, b \in B$ ). Nosotros denotamos esta gráfica como  $D(k, \lambda)$ , observando que los parámetros  $k$  y  $\lambda$  no necesariamente dependen de una gráfica.

Una gráfica  $D(k, \lambda)$  tiene las siguientes cuatro propiedades.

- es  $k$ -regular.
- es bipartita.
- tiene diámetro 3.
- dado cualquiera 2 vértices a distancia 2, hay solo  $\lambda$  vértices adyacente a ambos.

Una Gráfica de distancia regular es un subconjunto de gráficas regulares. Las gráficas de distancia regular tienen elementos de la intersección  $\{b_0, b_1, \dots, b_{D-1}; c_1, c_2, \dots, c_D\}$ , donde para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  de distancia  $r$ ,  $\delta(v, u) = r$ ,  $b_r$  es el número de vértices que son adyacentes a  $u$  y tienen distancia  $r + 1$  a  $v$ .  $c_r$  es el número de vértices que son adyacentes a  $u$  y tienen distancia  $r - 1$  desde  $v$ . Estos números depende solo de la distancia  $r$  y se mantienen para cualquier par de vértices  $(v, u)$ .

Otra manera de describir estas gráficas sería definir una subgráfica de  $G$ ,  $G_r(v_0)$ , tal que  $G_r(v_0)$  contiene todos los vértices que tienen distancia  $r$  de  $v_0$  o menor, y describir gráficas de distancia regular y número de intersección de la siguiente manera.

**Definición 5.2.4.** *Una Gráfica de distancia regular, es una gráfica  $k$ -regular con diámetro  $D$ , que tiene una colección  $\{b_0, b_1, \dots, b_{D-1}; c_1, c_2, \dots, c_D\}$  (de elementos no cero) que son llamados elementos de la intersección, tal que para cada par de vértices  $u, v$  con distancia  $r$  cumplen que  $b_0 = k, c_1 = 1$  y*

1. *la cantidad de vértices en  $G_{r-1}(v)$  que son adyacentes a  $u$  es  $c_r$ . ( $1 \leq r \leq D$ ).*
2. *la cantidad de vértices en  $G_{r+1}(v)$  que son adyacentes a  $u$  es  $b_r$ . ( $0 \leq r \leq D - 1$ ).*

**Ejemplo 5.2.5.** La figura 5.42 se denomina Gráfica cúbica, tiene distancia regular de grado 3 así;

$$\{3, 3, 1; 1, 3, 3\}$$

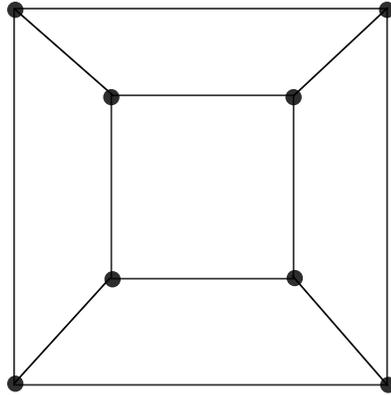


Figura 5.42: Gráfico cúbico

$D(k, \lambda)$  es una gráfica de distancia regular con intersección  $\{k, k-1, k-\lambda; 1, \lambda, k\}$ .

**Definición 5.2.6.** Un Isomorfismo local de dos gráficas  $G$  y  $H$ , es un mapeo  $f$  de  $V(G)$  en  $V(H)$  tal que los vértices adyacentes de  $v \in V(G)$  son mapeados uno a uno de manera individual a los vértices adyacentes de  $f(v) \in V(H)$ .

**Definición 5.2.7.** Diremos que  $G$  es una cubierta de  $s$ -pliegues de  $H$  si hay un Isomorfismo local  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $|f^{-1}(w)| = s$  para cada  $w \in V(H)$ .

Así  $\{w_1, w_2\}$  es una arista de  $H$ , entonces hay solo  $s$  aristas  $\{v_1, v_2\}$  tal que  $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2$ .

**Teorema 5.2.8** (ver [17]). *Sea  $G$  una gráfica regular de grado  $k$  y cuello 6, con exceso  $e \leq k - 2$ . Supongamos que para cada arista  $(\sigma, \tau)$  de  $G$  el exceso del conjunto  $X_{\sigma\tau}$  induce una subgráfica con solamente  $\frac{1}{2}e$  aristas, entonces  $G$  es una cubierta de  $\lambda$  - pliegues de una  $D(k, \lambda)$  gráfica con  $\lambda = \frac{1}{2}e + 1$ .*

Dada  $e=2$  entonces la condición de que  $\langle X \rangle$  tiene solo  $\frac{1}{2}e$  aristas es necesaria, ya que los 2 vértices en el exceso deben estar unidos por una arista.

En general el Teorema 5.2.8 dice que una gráfica con  $e=2$  y  $g = 6$  es una cubierta de  $s$ -pliegues

**Teorema 5.2.9** (ver [17]). *Una gráfica  $G$  con cuello 6, grado  $k$  y exceso 2 no puede existir si  $k \equiv 5$  o  $7 \pmod{8}$ .*

*Demostración:* Ya sabemos por el teorema anterior que  $G$  es una cubierta de 2-pliegues de una gráfica  $D(k, 2)$ .

Sea  $\pi$  un vértice típico de  $D(k, 2)$  es cubierto por dos vértices de  $G$ , y los denotaremos así  $\pi^+$  y  $\pi^-$ .

Una arista típica  $\{\pi, \beta\}$  de  $D(k, 2)$  es cubierta por dos aristas de  $G$  y hay solo dos posibilidades.

- 1) las aristas son  $\{\pi^+, \beta^+\}$  y  $\{\pi^-, \beta^-\}$
- 2) las aristas son  $\{\pi^+, \beta^-\}$  y  $\{\pi^-, \beta^+\}$

Para el caso 2) diremos que  $\{\pi, \beta\}$  corresponden al subconjunto  $E^-$  del conjunto de aristas  $E$  de  $D(k, 2)$ .

Consideremos un típico 4-ciclo  $\{\pi, \beta, \omega, \gamma\}$  de  $D(k, 2)$ . Si contiene un número par de aristas en  $E^-$  entonces las aristas de  $G$  que lo cubrieran corresponden dos al 4-ciclo, puesto que  $G$  tiene cuello 6, lo cual es imposible por lo que podemos concluir que cada 4-ciclo debe contener solo 1 o 3 aristas de  $E^-$ .

Sea  $C_1, C_2$  denota el número de 4-ciclos en  $D(k, 2)$  que contienen 1, 3 aristas en  $E^-$  respectivamente. Dado que dos de los  $v$  puntos de el biplano determina un único 4-ciclo, hay  $\frac{1}{2}v(v-1)$  4-ciclos en total y

$$C_1 + C_3 = \frac{1}{2}v(v-1)$$

Cada arista de  $D(k, 2)$  corresponde aun punto  $\pi$  y un bloque  $\beta$  de el biplano y así pertenecen a  $k-1$  4-ciclo  $(\pi, \beta, \omega, \gamma)$ , donde  $\omega$  pasa por los  $k-1$  puntos de  $\beta$  diferentes de  $\pi$  y  $\gamma$ , es el único bloque que contiene  $\pi$  y

$\omega$ .

Así contando las aristas en  $E^-$  obtenemos

$$C_1 + 3C_3 = (k-1)|E^-|$$

·  
así

$$2C_3 = (k-1)|E^-| - \frac{1}{2}v(v-1)$$

Ahora  $v = \frac{1}{2}(k^2 - k + 2)$  y si  $k \equiv 5$  o  $7 \pmod{8}$  encontramos que  $\frac{1}{2}v(v-1)$  es impar y  $(k-1)$  es par de modo que la ecuación para  $C_3$  no tiene solución. ■

# 6. LÍMITES SUPERIORES DE JAULAS

En las secciones anteriores, hemos enumerado y descrito algunas de las *Jaulas* actualmente conocidas.

En este capítulo presentaremos alguna de las construcciones más representativas que nos ayudaran para poder generara algunas jaulas.

Podemos dividir de manera un tanto arbitraria esta lista en dos grupos;

*Construcciones generales*- construcciones que producen Gráficas con valores arbitrariamente grandes de grado o cuellos.

*Construcciones individuales*- construcciones que se trabajan para valores específicos de cuello y grado.

Posteriormente presentaremos algunas  $(k, g)$ -gráficas de orden pequeño, denotadas por  $rec(k, g)$ .

## 6.1. Construcciones generales

### 6.1.1. Construcciones con cuellos grandes

En esta sección se describen construcciones para Gráficas regulares con cuellos arbitrariamente grandes.

Biggs (ver [16]) observo que el Límite de Moore implica que las gráficas  $k$ -regulares, mínimas de cuello  $g$  tienen aproximadamente  $(k - 1)^{g/2}$  vértices.

Por lo tanto al considerar una familia infinita de gráficas  $k$ -regulares  $\{G_i\}$

de cuello creciente  $g_i$ , comparamos el orden  $v_i$  con el Límite de Moore. Decimos que  $\{G_i\}$  es una familia con cuellos grandes si existe  $\gamma > 0$  tal que:

$$g_i \geq \gamma \log_{k-1}(v_i).$$

Del Límite de Moore se desprende que  $\gamma$  es como máximo 2, pero no hay familias conocidas con  $\gamma$  cerca de 2. Los resultados de Erdős, Sachs (ver [30]) y Sauer (ver [58]) probaron la existencia de las familias infinitas con  $\gamma = 1$ .

Las primeras construcciones explícitas se remontan a Margulis (ver [45]) logrando que  $\gamma = \frac{4}{9} (\approx 0,44)$  para algunas familias infinitas con un grado arbitrariamente grande y  $\gamma \approx 0,83$  para el grado 4. Estos fueron seguidos por los resultados de Imrich (ver [38]), quien produjo familias de grados grandes con  $\gamma \approx 0,78$  y una familia de gráficas trivalentes con  $\gamma \approx 0,96$ .

Weiss (ver [62]) demostró que las gráficas de sextetos (trivalentes) de Biggs y Hoare (ver [15]) probaron que satisfacen  $\gamma \geq \frac{4}{3}$ .

Biggs y Boshier (ver [14]) demostraron que las gráficas de Ramanujan, Lubotzky, Phillips y Sarnak (ver [44]) satisfacen  $\gamma \geq \frac{4}{3}$  por Biggs y Boshier (ver [14]). Los mejores resultados (para un alto grado arbitrario) se deben a Lazebnik, Ustimenko y Woldar (ver [43]) que han construido familias infinitas  $CD(n, q)$  (gráfica de vértices transitivos) con  $\gamma \geq \frac{4}{3} \log_q(q-1)$   $q$  una potencia prima.

### Construcción 6.1.1. *Mediante la gráfica de soporte*

Este método es usado para construir Gráficas de Moore que a su vez son Jaulas, está es la única construcción que nos garantiza que la gráfica resultante sera una Jaula.

**Definición 6.1.2.** *Dada una Gráfica  $G$ , se define su árbol generador  $T$  como aquel árbol que contiene todos los vértices de  $G$ .*

En la figura 6.43 se puede apreciar un árbol generador de una gráfica de Moore, en el primer nivel  $v_0$  como vértice inicial, en el segundo nivel los vértices etiquetados por grupos y finalmente en el tercer nivel el resto de vértices.

**Definición 6.1.3.** *Sea  $T$  el árbol generador asociado a una gráfica  $G$  de Moore. Llamemos gráfica de soporte de  $G$  a la gráfica resultante de añadir  $\Delta^2 - \Delta - 1$  aristas al árbol  $T$  mediante el siguiente procedimiento: unimos*

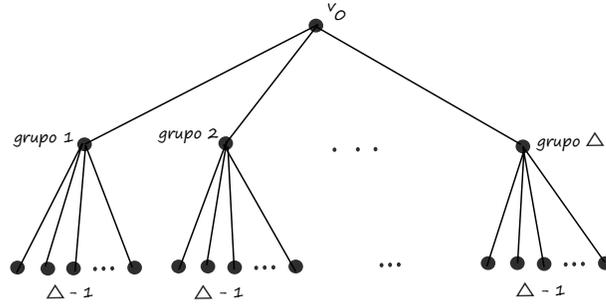


Figura 6.43: Árbol Generador de una Gráfica de Moore

el vértice  $i$  del grupo 1 al vértice  $i$  del grupo  $j$ , para todo  $\Delta - 1 \geq i \geq 1$  y para todo  $\Delta \geq j \geq 2$ .

En la figura 6.44 la gráfica de soporte adquiere el siguiente aspecto:

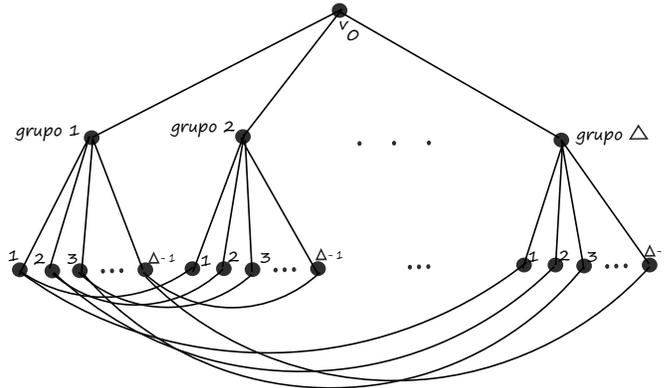


Figura 6.44: Gráfica de soporte de una Gráfica de Moore

**Nota 6.1.4.** Si  $G$  es una gráfica de Moore de grado  $\Delta > 2$ , entonces tiene diámetro 2 (ver [10]).

**Observación 6.1.5.** Dado que las gráficas de Moore tienen diámetro 2, su

*árbol generador no puede tener más de 3 niveles.*

Ahora presentaremos la construcción de la Gráfica de Petersen utilizando el método. La Gráfica de Moore de grado 3 recibe el nombre de Gráfica de Petersen que cuenta con las siguientes características:

Tiene diámetro 2, es 3-regular, cuello 5, con 10 vértices y 15 aristas.

Una manera de poder construir la Gráfica de Petersen es construyendo su árbol generador, como ya conocemos el número de vértices así;

$$n = 1 + \Delta + \Delta(\Delta - 1) = \Delta^2 + 1 = 1 + 3 + 9 - 3 = 10$$

Ahora bien como la gráfica es 3-regular, entonces podemos calcular el número de aristas es decir;

$$\ell = \frac{n \times \Delta}{2} = \frac{(\Delta^2 + 1)\Delta}{2} = 15.$$

En la siguiente figura se presenta el Árbol Generador de la Gráfica de Petersen, de tal manera que su construcción es colocando en el primer nivel el vértice  $\{A\}$ , en el segundo nivel los vértices  $\{B, C, D\}$ , cada vértice es un grupo es decir, grupo 1 =  $B$ , grupo 2 =  $C$  y grupo 3 =  $D$ , y en el tercer nivel los vértices  $\{E, F, G, H, I, J\}$ .

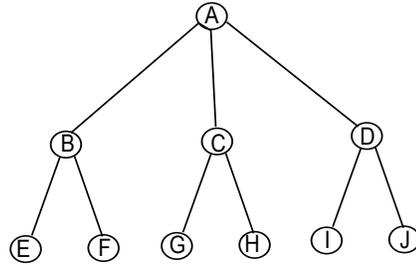


Figura 6.45: Árbol Generador de la Gráfica de Petersen

Empezaremos colocando las aristas de los vértices del tercer nivel, de tal manera que no formemos ciclos de longitud 3 o 4 solo se podrán hacer ciclos de longitud 5, considerando al vértice  $E$  como es 3-regular podremos

colocar dos aristas es decir  $\{(E, G), (E, I)\}$ , como se puede ver en la figura 6.46;

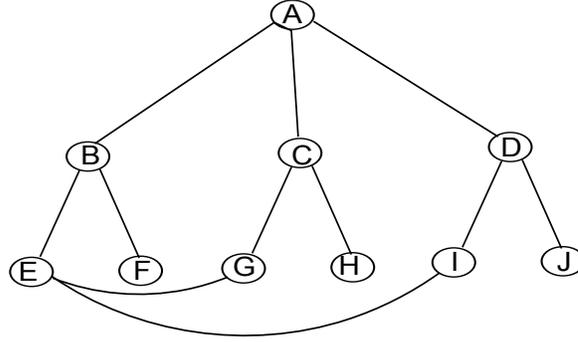


Figura 6.46: Construcción de la Gráfica de Petersen

Posteriormente nos fijaremos en el vértice  $E$  y colocaremos las aristas  $\{(F, H), (F, J)\}$  con las características antes dichas así como se ve en la figura 6.47;

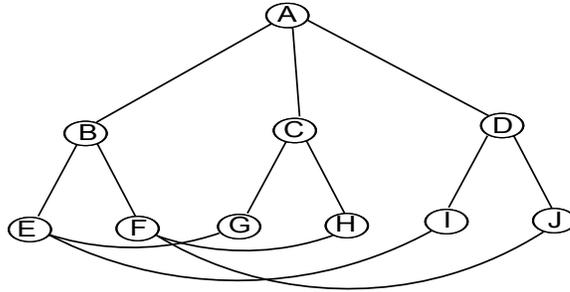


Figura 6.47: Construcción de la Gráfica de Petersen

Finalmente colocare el resto de las aristas que faltan es decir  $\{(G, J), (H, I)\}$ , como se puede ver en la figura 6.48;

De esta manera tenemos la construcción de la Gráfica de Petersen mediante la Gráfica de Soporte.

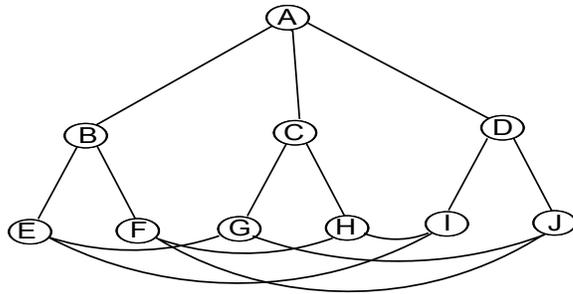


Figura 6.48: Construcción de la Gráfica de Petersen

**Construcción 6.1.6. Sachs**

Un truncamiento de un mapa es una construcción bien conocida de la Teoría Topológica de Gráficas, la construcción original de *Sachs* (ver [57]) es un caso de una construcción por truncamiento. Así que presentamos una ligera generalización de su construcción.

**Definición 6.1.7.** *Un truncamiento de una gráfica  $G$  (mapa) es una construcción en la que cada vértice  $v$  de  $G$  es reemplazado por un ciclo  $C$  y cada aristas que era incidente a  $v$  la hacemos que incida a algún vértice de  $C$ .*

**Definición 6.1.8.** *Sea  $G$  una gráfica finita  $k$ -regular, sea  $D(G)$  el conjunto de dardos de  $G$  obtenido de asociar cada arista de  $G$  con dos aristas dirigidas opuestas.*

**Definición 6.1.9.** *Un etiquetado vértice-dardos de  $G$  es una función  $\rho$  del conjunto  $D(G)$  en el conjunto  $\{1, 2, \dots, k\}$  que mapea los dardos que emanan de un vértice  $v \in V(G)$  biyectivamente sobre  $\{1, 2, \dots, k\}$ .*

**Definición 6.1.10.** *Sea  $H$  una gráfica de orden  $k$  con  $V(H) = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ . Un truncamiento generalizado de una gráfica  $G$   $k$ -regular ( $G$  tiene un etiquetado  $\rho$  de vértice-dardos) con la gráfica  $H$  ( $H$  es de orden  $k$ ) es la gráfica  $T(G, \rho; H)$  obtenida de  $G$  reemplazando los vértices de  $G$  con copias de  $H$  de la siguiente manera: cada dardo de  $G$  que emanaba de  $v$  la hacemos que incida en un vértice de  $H$  de acuerdo a la regla  $u_i$  es incidente al dardo etiquetado con  $i$ .*

**Nota 6.1.11.** *El truncamiento generalizado de una gráfica completa  $G$   $k$ -regular, con la gráfica  $H$  (de orden  $k$ ) es la gráfica  $T(G, \rho; H)$  o solamente  $T(G, H)$ , se obtiene al reemplazar los vértices de  $G$  por copias de  $H$  como sigue: cada vértice  $v_i$  de  $G$  es reemplazado por  $H_i$ , de acuerdo con la función  $\rho$ , es decir  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$  tal que  $v_i$  es remplazado por  $H_i$  con  $V(H_i) = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ , así las aristas de  $T(G, \rho; H)$  son:*

*Primero serán las aristas de cada ciclo, y posteriormente los dardos, con la siguiente estructura;*

*Sea  $u_t \in V(H_i)$ ;*

*Si  $t \neq i$ , con  $0 \leq t \leq k$  y  $1 \leq i \leq k$  entonces la arista de  $T(G, \rho; H)$  inicia en el vértice  $u_t \in H_i$  y termina en el vértice  $u_i \in H_t$ .*

*Si  $t = i$  entonces la arista inician en  $u_t \in H_i$  y termina en el vértice  $u_t \in H_{k+1}$ .*

**Ejemplo 6.1.12.** En la figura 6.49 se muestra una gráfica completa  $K_4$ , con  $V(K_4) = \{a, b, c, d\}$ , tal que cada vértice de  $K_4$  es remplazado por un ciclo de orden 3  $C_3$  en  $T(K_4, \rho; C_3)$ , es decir  $V(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $V(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ ,  $V(c) = \{c_1, c_2, c_3\}$ ,  $V(d) = \{d_1, d_2, d_3\}$ , así  $a_i, b_i, c_i, d_i \in V(K_4, \rho; C_3)$  con  $i = 1, 2, 3$ , así los dardos son  $D(K_4) = \{(a, d), (d, a), (a, c), (c, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (d, c), (c, d)\}$ , las aristas de  $T(K_4, \rho; C_3)$  son  $\rho(D(K_4)) = \{(a_1, b_1), (a_3, c_1), (a_2, d_1), (d_2, b_2), (d_3, c_2), (c_3, b_3)\}$  y las aristas respectivas de cada ciclo;

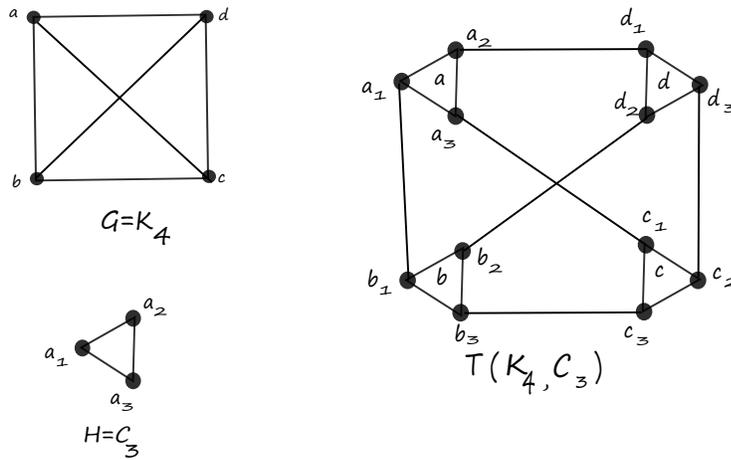


Figura 6.49: Un truncamiento generalizado de  $K_4$  por  $C_3$

En un truncamiento generalizado de  $K_n$  por  $C_{n-1}$  no necesariamente se hace visible la función.

**Ejemplo 6.1.13.** En la figura 6.50 se aprecia un truncamiento generalizado donde  $H$  es  $C_5$  un ciclo de orden 5, y  $G$  es  $K_6$  una gráfica completa, la cual es 5-regular, así  $T(K_6, C_5)$ .

**Nota 6.1.14.** Un etiquetado vértice-dardos dependerá de la gráfica original, la longitud de los ciclos y la función.

**Nota 6.1.15.** La definición anterior se puede generalizar en un Truncamiento generalizado para  $G$  una  $(k, g)$ -gráfica y  $H$  una  $(k', g')$ -gráfica de orden  $k$ , donde cada  $v \in V(G)$  es remplazado por  $H$ , unidas por los dardos

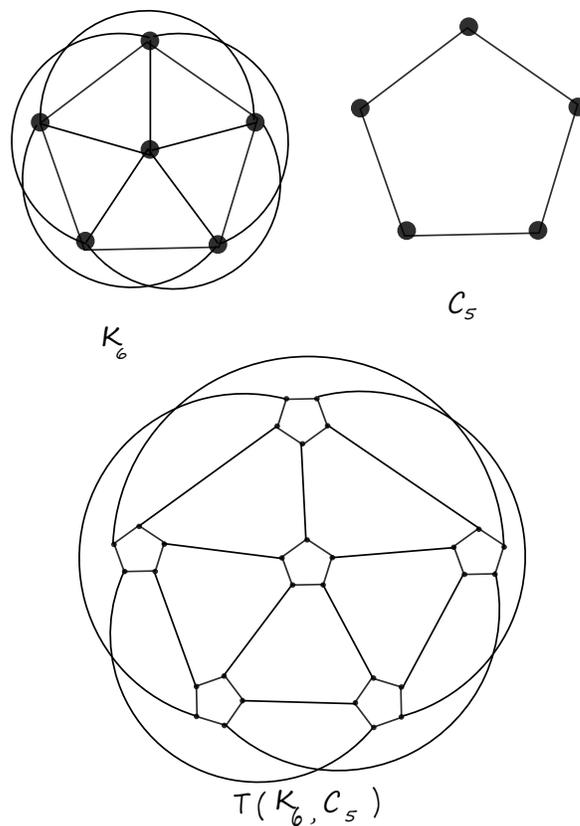


Figura 6.50: Un truncamiento generalizado de  $K_6$  por  $C_5$

que originalmente emanaban de  $v$  de acuerdo con la regla de que  $u_i$  está unido al dardo etiquetado por  $i$ .

La importancia del truncamiento generalizado para la construcción de  $(k, g)$ -gráficas se puede ver en el siguiente teorema.

**Teorema 6.1.16.** *Sea  $G$  una  $(k, g)$ -gráfica finita con un etiquetado vértice-dardos  $\rho$ , y sea  $H$  una  $(k', g')$ -gráfica de orden  $k$ . El truncamiento generalizado  $T(G, \rho; H)$  es una gráfica  $(k' + 1)$ -regular de cuello no menor que  $\min\{2g, g'\}$ , y si  $g' \leq 2g$ , entonces  $g'$  es el cuello exacto de  $T(G, \rho; H)$ .*

*Demostración:* Para la demostración se va hacer uso de colores, con el

propósito de hacer notar la diferencia entre los dardos y las aristas de  $H$ . En  $T(G, \rho; H)$ , el color de los aristas de  $H$  son rojas, y el resto de las viejas aristas de  $G$  son azules. Las aristas azules forman un 1-factor de  $T(G, \rho; H)$  y cada vértice  $v$  de  $T(G, \rho; H)$  incide con una arista azul y  $k'$  aristas rojo de  $T(G, \rho; H)$ . Así,  $T(G, \rho; H)$  es una gráfica  $(k' + 1)$ -regular. Los ciclos de  $T(G, \rho; H)$  no tienen dos aristas azules adyacentes. Si un ciclo  $C$  no contiene aristas azules, debe estar contenido en una copia de  $H$ , y por lo tanto su longitud debe ser mayor o igual que  $g'$ . Si  $C$  contiene aristas rojas y azules, la secuencia de las aristas azules no es repetitiva. Además, cualesquiera dos aristas azules conectadas a través de una trayectoria de aristas rojas en  $T(G, \rho; H)$  deben haber sido originalmente adyacentes en  $G$ . Por lo tanto, las aristas azules constituyen un camino en la gráfica original  $G$  que contiene al menos un ciclo de  $G$ , y por lo tanto el ciclo rojo / azul tiene una longitud de al menos  $2g$ . Finalmente,  $T(G, \rho; H)$  contiene un ciclo de longitud  $g'$ . ■

**Teorema 6.1.17.** *Para cada par de parámetros  $k \geq 2$  y  $g \geq 3$ , existe una gráfica  $k$ -regular finita de cuello  $g$ .*

*Demostración:* Procedemos por inducción sobre  $k$ .

Si  $k = 2$ , el  $g$ -ciclo  $C_g$  es una  $(2, g)$ -Jaula para todo  $g \geq 3$ .

Para el paso de inducción, asumimos la existencia de  $H$  una  $(k, g)$ -gráfica para  $k \geq 2$  y  $g \geq 3$  de orden  $n$ .

Sea  $G$  una gráfica  $n$ -regular de cuello al menos  $\lceil \frac{g}{2} \rceil$  garantizado por la construcción previa, y sea  $\rho$  un etiquetado vértice-dardo de  $G$ .

Por el teorema anterior, la gráfica  $T(G, \rho; H)$  es una gráfica  $(k + 1)$ -regular de cuello  $g$ . ■

La construcción de Sachs ha reaparecido recientemente como la construcción en zig-zag, la cual ha sido muy utilizada en el contexto de las gráficas de expansión (ver [64]).

### Construcción 6.1.18. Chandran

Chandran (ver [21]) ideó un algoritmo simple que construye una gráfica de orden  $n$ , se garantiza que cada vértice tiene grado  $k - 1$ ,  $k$  o  $k + 1$ , comienza con un ciclo hamiltoniano o un apareamiento, y añade vértices uno a la vez basados en la distancia y el grado. La gráfica resultante tiene cuello  $\log(n)$ .

Construcción ;

El siguiente algoritmo toma el número de vértices  $n$  y el grado medio  $k$  (donde  $k < \frac{n}{3}$ ), como entrada y construye una gráfica de cuello al menos

$\log_k(n) + O(1)$ . Todos los vértices de la gráfica tendrán el grado  $k - 1$ ,  $k$  o  $k + 1$ .

Sea  $n$  un número entero par. Supongamos que en un principio, tiene una coincidencia perfecta en los  $n$  vértices. Es decir, comenzamos con una gráfica que tiene  $\frac{n}{2}$  vértices, el grado de cada vértice es 1.

Hacemos los siguientes pasos para  $i = \frac{n}{2} + 1$  hasta  $\frac{kn}{2}$

- 1.- Sea  $S = \{u \in V : gr(u) \leq gr(v) \text{ para todo } v \in V\}$ .
- 2.- Sea  $T = \{(u, v) \in S \times V : d(u, v) \geq d(x, y) \text{ para todo } (x, y) \in S \times V\}$ .
- 3.- Si hay un par  $(u, v) \in T$ , tal que  $gr(v) \leq j$ , donde  $j = \lceil \frac{2i}{n} \rceil$ , y la arista  $(u, v)$  no está ya en la gráfica, introduzca una arista  $(u, v)$  y vaya al inicio del ciclo, si hay varios pares de este tipo, escoja uno arbitrariamente. De lo contrario, vaya a 4.
- 4.- Sea  $p = d(u, v)$ , donde  $(u, v) \in T$ . Ponga  $p = p - 1$ . Ahora asigne  $T = \{(u, v) \in S \times V : d(u, v) = p\}$ . Vaya a 3.

### 6.1.2. Construcción de cuello 5

Una gráfica de Levi o gráfica de incidencia es una gráfica bipartita asociada con una estructura de incidencia. A partir de una colección de puntos y líneas en una geometría de incidencia, formamos una gráfica con un vértice por punto, un vértice por línea y una arista para cada incidencia entre un punto y una línea. Son nombradas Gráficas de Levi por F. W. Levi (ver [42]) quien escribió sobre esta clase de gráficas.

**Definición 6.1.19.** *La Gráfica de Levi es la Gráfica de incidencia de la configuración de Cremona-Richmond, consiste en la unión de dos subgráficas, como se aprecia en la Figura 6.51.*

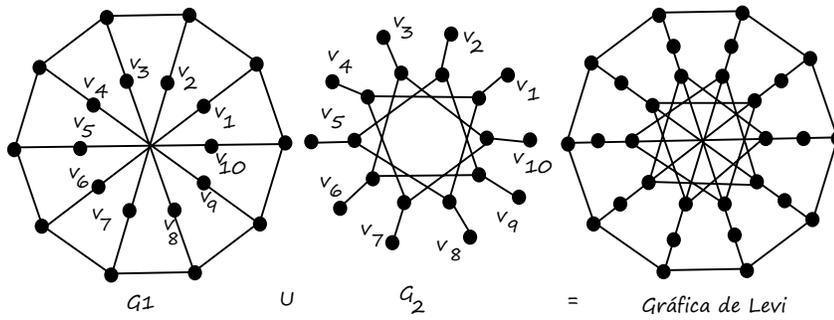


Figura 6.51: Gráfica de Levi

**Nota 6.1.20.** *La Gráfica de Incidencia de una configuración genérica  $a$  veces se le conoce como Gráfica de Levi.*

A continuación presentamos una serie de construcciones que producen familias de cuello 5. Nosotros intentamos proporcionar una lista, que incluye las construcciones más antiguas, que pueden resultar útiles, y del mismo modo construcciones más nuevas.

Las construcciones siguientes producen gráficas cuyos órdenes son aproximadamente dos veces el Límite de Moore, que es  $k^2 + 1$  para el grado  $k$  y el cuello 5.

**Construcción 6.1.21. Brown**

Brown construyó una familia de gráficas de cuello 5 basada en su construcción para la de cuello 6 (ver [22]).

Empieza con un conjunto de puntos  $P = \{p_0, \dots, p_q\}$  y un conjunto de líneas  $L = \{l_0, \dots, l_q\}$ , tal que  $p_0$  es incidente con todas las líneas en  $L$  y  $l_0$  es incidente con todos los puntos de  $P$ , y eliminamos este de  $PG(2, q)$ .

La gráfica de incidencia de la geometría resultante es una gráfica  $q$ -regular de cuello 6 y orden  $2q^2$ . Agregamos  $q$ -ciclos a las vecindades de los vértices  $= \{p_0, \dots, p_q\}$  y  $\{l_0, \dots, l_q\}$ . La gráfica resultante tiene grado  $q + 2$ , cuello 5, y orden  $2q^2$ .

**Construcción 6.1.22. Wegner**

Wegner construyó una familia de gráficas de grado  $k$  (con  $k$  primo), cuello 5, y orden  $2k^2 - 2k$ .

Sea  $p \geq 5$  un primo. La gráfica se construye conectando los vértices de un  $p^2$ -ciclo  $A$  con un conjunto independiente  $B$  de tamaño  $p(p-2)$ . Denotamos los vértices de  $A$  por  $a_0, \dots, a_{p^2-1}$ , cada  $a_i$  es adyacente a  $a_{i+1}$ , con  $0 \leq i \leq p^2 - 1$ ; denotamos los vértices de  $B$  por  $b_{s,t}$ , para  $0 \leq s \leq p-3$  y  $0 \leq t < p$ . Las adyacencias entre los vértices del ciclo y el conjunto independiente se definen como sigue. Para cada  $a_k$ , escribo  $k$  como  $ip+j$ , donde  $0 \leq i, j < p$ , y hacemos  $a_{ip+j}$  adyacente a  $b_{r,ir+j}$ , para  $0 \leq r \leq p-3$ .

**Ejemplo 6.1.23.** *La más pequeña de las Gráficas de Wegner es la gráfica 5-regular de orden 40.*

Sea  $G$  la  $(5, 5)$ -gráfica tal que  $|V(G)| = |V(A)| \cup |V(B)|$ .

Así  $V(A) = \{a_0, \dots, a_{24}\}$  y  $V(B) = \{b_{0,0}, \dots, b_{0,4}, b_{1,0}, \dots, b_{1,4}, b_{2,0}, \dots, b_{2,4}\}$ , con  $p = 5$ , sea  $b_{s,t}$ , para  $0 \leq s \leq 2$ ,  $0 \leq t < 5$  y para cada  $a_k$ , escribo  $k$  como  $i5 + j$ , donde  $0 \leq i, j < 5$ , y hacemos  $a_{i5+j}$  adyacente a  $b_{r,ir+j}$ , para  $0 \leq r \leq 2$ , ( $b_{s,t}$  tiene  $p$  vértices adyacentes en  $A$ , donde  $ir + j \equiv t \pmod{p}$ ) con lo cual generamos la construcción de Wegner, así  $a_0$  es adyacente a los vértices  $a_1, a_{24}, b_{0,0}, b_{1,0}$  y  $b_{2,0}$  como se aprecia en la figura 6.52 y sea  $C = (b_{1,1}, a_1, a_2, b_{2,2}, a_5, b_{1,1})$  un ciclo en  $G$ ;

**Construcción 6.1.24. Araujo-Pardo y Montellano-Ballesteros**

Los autores utilizaron planos proyectivos y planos afines para construir una familia numerosa de Gráficas regulares de cuello 5 y grado  $k$ .

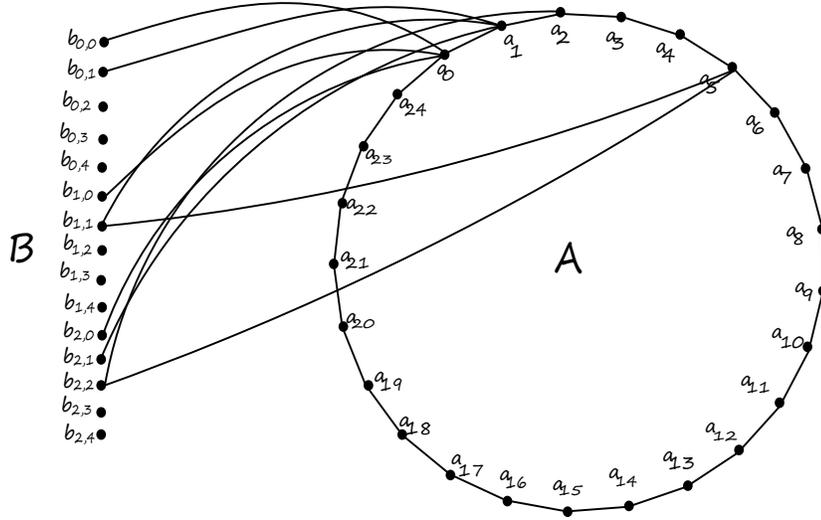


Figura 6.52:  $(5, 5)$ –Gráfica

Su construcción es uno de los más fuerte resultados cuando el grado  $k \equiv p+2$ , para un primo  $p$ , de orden  $2k^2 - 8k + 8$ , Araujo-Pardo y Montellano-Ballesteros establecen el siguiente límite para las  $(k, 5)$ –gráficas.

**Araujo-Pardo y Montellano-Ballesteros**

En el caso general, donde  $k - 2$  no es un primo, su límite es;

$$n(k, 5) \leq \begin{cases} 4(k - 2)^2, & \text{Cuando } 7 \leq k \leq 3275; \\ 2(k - 2)(k - 1)\left(1 + \frac{1}{2 \ln^2(k-1)}\right), & \text{Cuando } 3275 < k. \end{cases}$$

**Nota 6.1.25.** Para establecer los límites de las  $(k, 5)$ –gráficas Araujo-Pardo y Montellano-Ballesteros (ver [5]) utilizan una construcción general, basada en la representación explícita de la construcción original de Brown.

**Observación 6.1.26.** *Jørgensen (ver [42]) construyó varias familias finitas de gráficas  $k$ -regulares de cuello 5.*

*Para las  $(k, 5)$ -gráficas que tienen grado  $k = q + 3$  (con  $q$  potencia prima) tienen orden  $2k^2 - 12k + 16$ . Jørgensen probó dos teoremas donde propuso los límites que se pueden resumir de la siguiente manera;*

### Jørgensen

Sea  $q$  una potencia prima, entonces

$$n(k, 5) \leq \begin{cases} 2(k-1)(q-1), & \text{Cuando } 7 \leq q, k \leq q+2; \\ 2(k-2)(q-1), & \text{Cuando } 13 \leq q, k \leq q+3, \text{ y } q \text{ impar;} \end{cases}$$

### 6.1.3. Construcción de cuello 6, 8 y 12

Cuando  $k-1$  es una potencia prima y  $g = 6, 8$  o  $12$ , la  $(k, g)$ -jaula es conocida y es la gráfica de incidencia del  $n$ -gon generalizado, para  $n = 3, 4$  o  $6$  respectivamente.

En esta sección discutimos construcciones para grado  $k$  donde los  $n$ -gon generalizado no se conocen. El número de construcciones diferentes para estos valores se obtiene eliminando conjuntos particulares de vértices de las gráficas de incidencia de los  $n$ -gones generalizados. Esto podría compararse a la situación de cuello 5 donde las  $(3, 5)$ ,  $(5, 5)$  y  $(6, 5)$  jaulas pueden ser construidas a partir de quitar los vértices de la gráfica de Hoffman-Singleton, que es la  $(7, 5)$ -jaula.

**Definición 6.1.27.** *La pareja  $(P_0, L_0)$  en el  $n$ -gon generalizado  $(P, L)$  se denomina a la estructura  $t$ -good, si hay  $t$  líneas de  $L_0$  a través de cualquier punto no en  $P_0$ , y hay  $t$  puntos de  $P_0$  en cualquier línea no en  $L_0$ .*

Al quitar puntos y líneas de una estructura  $t$ -good de la gráfica de incidencia de un  $n$ -gon generalizado resulta en una  $(q+1-t)$ -gráfica regular de cuello al menos  $2n$ .

**Construcción 6.1.28. Brown**

Brown fue el primero que consideró explícitamente el caso de cuellos 6, y la mayoría de las construcciones se derivan directa o indirectamente, su construcción tiene la estructura de un  $t$ -good.

Comienza con una estructura de 1-good que consiste en un conjunto de vértices  $P = \{p_0, \dots, p_q\}$  y un conjunto de aristas  $L = \{l_0, \dots, l_q\}$ , tal que  $p_0$  es incidente con todas las aristas en  $L$  y  $l_0$  es incidente con todos los vértices en  $P$ , y lo elimina de  $PG(2, q)$ . La gráfica de incidencia de la geometría resultante es una gráfica  $q$ -regular de cuello 6 y de orden  $2q^2$ .

Para  $t > 1$ , el también elimina a todos los vecinos de  $p_1, \dots, p_{t-1}$  y  $l_1, \dots, l_{t-1}$  para obtener una geometría cuya gráfica de incidencia tiene cuello (al menos) 6, cuyo grado es  $q - t + 1$ , y cuyo orden es  $2q(q - t + 1)$ . Luego utiliza el postulado de *Bertrand* que afirma que por cada  $k > 2$  existe un primo  $p$  tal que  $k < p < 2k$  para demostrar que  $n(k, 6) < 4k^2$ , para todos los  $k$ , y otros resultados para mostrar que para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe un entero  $N$  tal que para todo  $k > N$ ,  $n(k, 6) < 2(1 + \varepsilon)k^2$ . Tenga en cuenta que  $M(k, 6) = 2k^2 - 2k + 2$ .

**Observación 6.1.29.** *Araujo, González, Montellano-Ballesteros y Serra (ver [4]) aplican la construcción de Brown a cuadriláteros generalizados y a hexágonos, con los cuales obtenemos los siguientes límites.*

**Araujo, González, Montellano-Ballesteros, Serra**

Límites válidos para  $g = 6, 8$  o  $12$ ,  $k = q - 1$ .

$$n(k, g) \leq 2kq^{\frac{g-4}{2}}$$

Mediante el uso de resultados recientes sobre la distribución de los primos se obtiene:

$$n(k, g) \geq \begin{cases} 2k(k-1)^{\frac{g-4}{2}} \left(\frac{7}{6}\right)^{\frac{g-4}{2}}, & 7 \leq k \leq 3275; \\ 2k(k-1)^{\frac{g-4}{2}} \left(1 + \frac{1}{2In^2(k)}\right)^{\frac{g-4}{2}}, & 3275 \leq k. \end{cases}$$

**Observación 6.1.30.** *Aplicando su concepto de una estructura  $t$  – good a 4 – gons y 6 – gons generalizados, Gács y Héger (ver [32]) construyen gráficas que establecen los siguientes dos límites para las potencias primas  $q$ .*

#### Gács y Héger

Límites para las potencias primas  $q$ .

$$n(q, 8) \leq 2(q^3 - 2q), \text{ } q \text{ impar}$$

$$n(q, 8) \leq 2(q^3 - 3q - 2), \text{ } q \text{ par}$$

$$n(q, 12) \leq 2(q^5 - q^3)$$

**Observación 6.1.31.** *Balbuena (ver [6]) hace una construcción basada en cuadrados latinos y cubre un caso para las de cuello 8 no incluido en el límite superior de Gács y Héger (ver [32]), con que define un límite.*

#### Balbuena

Si el grado  $k \leq q$  y  $q$  es potencia primera, entonces;

$$n(k, 8) \leq 2q(qk - 1)$$

#### 6.1.4. Supresión

Varias de las construcciones anteriores se obtienen quitando los vértices y las aristas incidentes a partir de pequeñas  $(k, g)$ –gráficas conocidas.

**Definición 6.1.32.** *Las Gráficas cúbicas, también llamadas Gráficas trivalentes, son gráficas 3- regulares (las  $(3, g)$ –jaula son gráficas cúbicas).*

**Ejemplo 6.1.33.** *En la figura 6.53 se muestra una gráfica trivalente, es 3–regular con 8 vértices.*

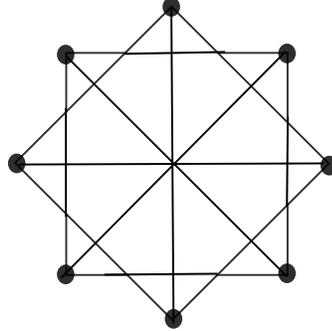


Figura 6.53: Gráfica trivalente de 8-vértices

**Definición 6.1.34.** Sea  $S$  un árbol, tal que es una subgráfica de  $G$ , con  $G$  una  $(k, g)$ -gráfica, más precisamente una gráfica cubica, así la gráfica de Supresión denotada como  $G \ominus S$  es la gráfica resultante de la eliminación del árbol.

**Ejemplo 6.1.35.** Consideremos a la Gráfica de Tutter-Coxeter tal que es Isomorfa a la Gráfica rearranged Levi notemos al árbol generado por los vértices  $\{a, b, c, d, e, f\}$  como se ve en la figura 6.54 con lo cual la gráfica resultante es la gráfica de supresión, en este caso es la Gráfica de McGee.

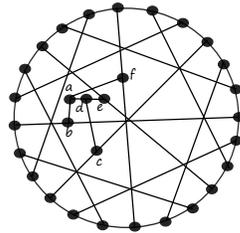


Figura 6.54: Gráfica rearranged Levi

En el caso de  $k = 3$ , se pueden suprimir los vértices resultantes de grado 2. Para valores mayores de  $k$ , el paso final implica emparejar los vértices de grado  $k - 1$  y unirlos con las aristas.

El objetivo es buscar subgráficas  $S$  cuya eliminación deja a una gráfica cuyo cuello es por lo menos  $g - 1$ . Este proceso es un ejemplo de una clase de construcciones que usualmente se conoce como Supresión .

La supresión en hexágonos generalizados da la construcción de la  $(3, 11)$ -jaula, debido a Balaban (ver [7]), en el que eliminó un pequeño subárbol de la  $(3, 12)$ -Jaula. Araujo-Pardo (ver [1]) aplicó un tipo de supresión a las gráficas de incidencia de polígonos generalizados para obtener gráficas cuyo cuello es uno menos que la gráfica de incidencia original.

Otro corte de Araujo-Pardo y Balbuena de cuello 6 se aplica la supresión a cualquier grado  $k$  (ver [2]). Sea  $q$  la potencia prima más pequeña mayor que  $k$ , entonces los autores muestran que  $n(k, 6) \leq 2(qk - 2)$ .

Del mismo modo, Araujo-Pardo, Balbuena y Héger aplican el método de supresión de Brown a las de cuello 6, 8 y 12 (ver [3]). Para la de cuello 12, y  $q$  una potencia prima mayor que 3, obtienen un resultado para grado  $k \leq q$ .

$$n(k, 12) \leq 2kq^2(q^2 - 1)$$

## 6.2. Construcciones individuales

### 6.2.1. Construcciones Individuales para el grado 3

El orden de las jaulas trivalentes de cuello mayor o igual a 13 es inestable. El cuadro siguiente muestra el estado actual de las Jaulas conocidas hasta grado 32. Los límites superiores se establecieron de forma independiente a los inferiores.

También hemos incluido las jaulas conocidas de cuello 5 a 12.

Una digráfica, usualmente denotada por la letra  $D$ , es una pareja ordenada  $(V(D), F(D)) = D$  donde  $V(D)$  es un conjunto, que para nuestros fines será finito y no vacío, llamado el conjunto de los vértices de  $D$ , y  $F(D)$  es un subconjunto de  $(V(D) \times V(D)) / \{(v, v) | v \in V(D)\}$  llamado el conjunto de las flechas de  $D$ . Así, todo elemento de  $V(D)$  es un vértice y todo elemento de  $F(D)$  una flecha. Una flecha  $(u, v)$  recibe el nombre de flecha simétrica si  $(v, u)$  también es una flecha. En la figura 6.55  $(w, v)$  es una flecha simétrica (y por lo tanto también  $(v, w)$  lo es), del conjunto  $V(D)$  se le llama el orden de  $D$  y a la cardinalidad de  $F(D)$  se le conoce como el tamaño de  $D$ .

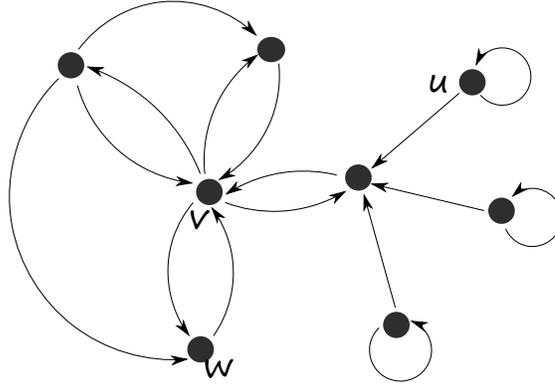


Figura 6.55: Digráfica  $D$

<i>Cuello</i>	Lím. Inf.	Lím. Sup.	N. de Jaulas	Debido a
5	10	10	1	Petersen (ver [51])
6	14	14	1	Heawood (ver [63])
7	24	24	1	McGee (ver [46])
8	30	30	1	Tutte (ver [61])
9	58	58	18	Brinkmann-McKay-Saager (ver [15])
10	70	70	3	O'Keefe-Wong (ver [8])
11	112	112	1	Mckay-Myrvold;Balaban (ver [7])
12	126	126	1	Benson (ver [13])
13	202	272	-	McKay-Myrvold;Hoare (ver [19])
14	258	384	-	McKay;Exoo (ver [25])
15	384	620	-	Biggs (ver [16])
16	512	960	-	Exoo (ver [25])
17	768	2176	-	Exoo (ver [27])
18	1024	2560	-	Exoo (ver [27])
19	1536	4324	-	Hoare (ver [36])
20	2048	5376	-	Exoo (ver [27])
21	3072	16028	-	Exoo (ver [28])
22	4096	16206	-	Biggs-Hoare (ver [16])
23	6144	49326	-	Exoo(ver [28])
24	8192	49608	-	Bray-Parker-Rowley (ver [21])
25	12288	108906	-	Exoo (ver [28])
26	16384	109200	-	Bray-Parker-Rowley (ver [21])
27	24576	285852	-	Bray-Parker-Rowley (ver [21])
28	32768	285852	-	Bray-Parker-Rowley (ver [21])
29	49152	1141484	-	Exoo-Jajcay (ver [26])
30	65536	1143408	-	Exoo-Jajcay (ver [26])
31	98304	3649794	-	Bray-Parker-Rowley (ver [21])
32	131072	3650304	-	Bray-Parker-Rowley (ver [21])

Cuadro 6.2: Límites para las jaulas trivalentes

**Definición 6.2.1.** *Una Gráfica de base  $D$  es una digráfica finita con posibles flechas y múltiples aristas. Denotamos sus vértices, aristas y flechas por  $V(G)$ ,  $A(G)$  y  $F(G)$ , respectivamente. Cada arista  $e \in A(G)$  se representa dos veces en  $F(G)$  (una vez con cada una de las dos orientaciones posibles) y si  $e \in F(G)$ , denotamos la flecha inversa por  $e^{-1}$ .*

En la figura 6.56 mostramos dos gráficas base que presentan la flechas múltiples y lazos.

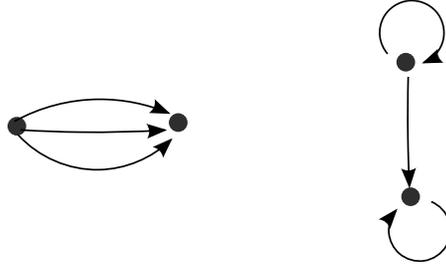


Figura 6.56: Ejemplos de gráficas base

**Observación 6.2.2.** Las gráficas de voltage son los ascensores de las gráficas de base determinados por una asignación numérica  $p$ , que agrupan las aristas y/o flechas de la gráfica base.

**Nota 6.2.3.** Para poder generar a  $G$  mediante de la gráfica base  $D$  tomaremos en cuenta algunas características;

1.- Cada vértice de  $D$  representara un conjunto de vértices de la misma cardinalidad en  $G$ .

2.- Cada flecha o arista en  $D$  tendrá una asignación numérica ( $p$ ) en la cual sera colocado de acuerdo a un orden. Dicho orden se expresa de la siguiente manera; sea  $(u, v) \in F(D)$  tal que en  $G$   $u$  y  $v$  son conjuntos de vértices en  $G$ , es decir  $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  y  $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , sean  $u_i \in V(u)$  y  $v_j \in V(v)$ , tal que  $(v_j, u_{j+p \equiv \text{imod}(n)}) \in A(G)$

3.- Si la Gráfica base tiene lazos, solo serán ciclos, si hay únicamente una flecha o una arista sin algún vértices sera como el anterior.

**Ejemplo 6.2.4.** En la figura 6.57 se aprecia 3 Gráficas base  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  con una asignación numérica y sus gráficas generadas por dicha asignación  $G_1$ ,  $G_2$  Y  $G_3$ .

En la figura 6.58 se puede ver la Gráfica base de la Gráfica de Petersen.

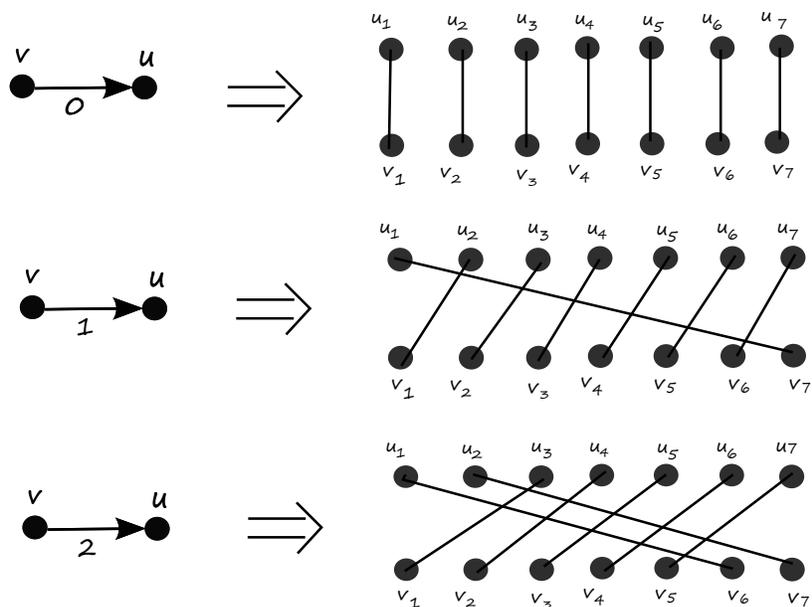


Figura 6.57: Ejemplos de gráficas base

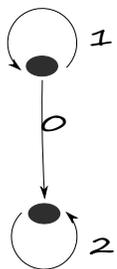


Figura 6.58: Gráfica base de Petersen

**Definición 6.2.5.** La Gráfica base  $D$  agrupada con una flecha doble a la Gráfica  $G$  sera llamada, Gráfica de ascensor.  
 En la figura 6.59 podemos ver La Gráfica de Petersen como un ascensor.

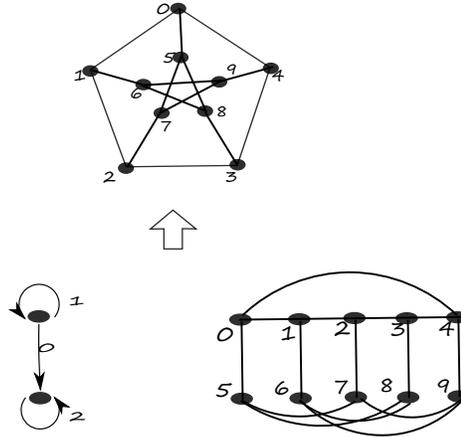


Figura 6.59: La Gráfica de Petersen como un ascensor

**Ejemplo 6.2.6.** En la figura 6.60 se puede distinguir la Gráfica base de la  $(3, 7)$ -Jaula y a partir de ella su construcción. El orden de la  $(3, 7)$ -Jaula es 24, es decir tiene 3 subconjuntos de 8 vértices cada uno así  $u = \{u_1, u_2, \dots, u_8\}$ ,  $v = \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$  y  $w = \{w_1, w_2, \dots, w_8\}$ .

En lo que sigue daremos una lista de las gráficas cuyos ordenes, denotados por  $rec(k, g)$ , son los más pequeñas actualmente conocidas, algunas de estas pueden ser *Jaulas*.

$$Rec(3, 13) = 272$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 13 tiene 272 vértices y la gráfica fue descubierta por Hoare (ver [19]).

$$Rec(3, 14) = 384$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 14 y el orden 384 fue construida por Exoo (ver [25]), en la figura 6.61 se muestra su Gráfica base.

$$Rec(3, 15) = 620$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 15 tiene 620 vértices y es la gráfica sexteto descubierta por Biggs y Hoare (ver [16]).

$$Rec(3, 16) = 960$$

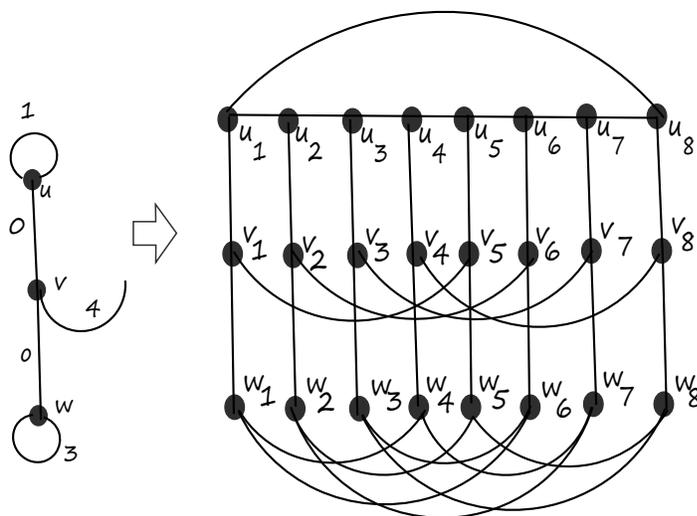


Figura 6.60: La  $(3, 7)$ -Jaula como un ascensor

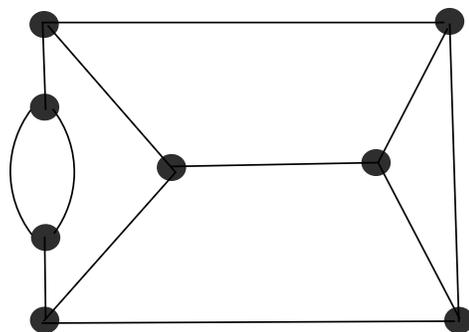


Figura 6.61: Gráfica base de cuello 14

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 16 tiene 960 vértices y fue descubierta por Exoo (ver [29]).

$$Rec(3, 17) = 2176$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 17 tiene orden 2176 y fue descubierta por Exoo (ver [27]), en la figura 6.62 se muestra su Gráfica base.

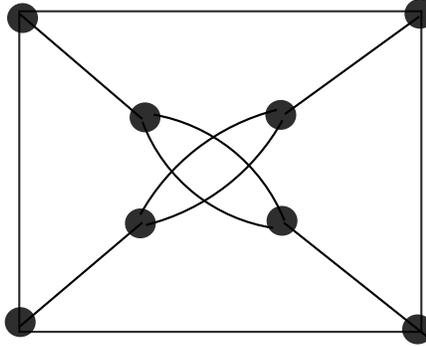


Figura 6.62: Gráfica base de cuello 17

$$Rec(3, 18) = 2560$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 18 tiene 2560 vértices y fue descubierta por Exoo (ver [27]), en la figura 6.63 se muestra su Gráfica base.

$$Rec(3, 19) = 4324$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 19 tiene orden 4324, descubierta por Hoare (ver [36]).

$$Rec(3, 20) = 5376$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 20 tiene orden 5376 y fue descubierta por Exoo (ver [27]).

$$Rec(3, 21) = 16028$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 21 tiene orden 16028 y fue obtenida por Exoo (ver [28]).

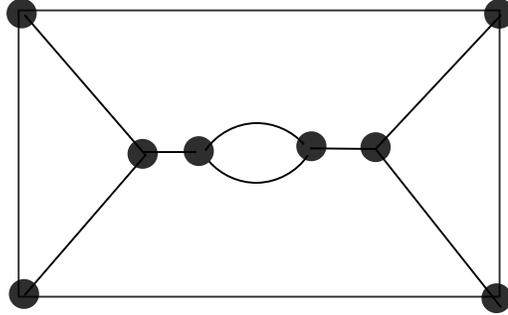


Figura 6.63: Gráfica base de cuello 18

$$Rec(3, 22) = 16206$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 22 tiene orden 16206, descubierta por Biggs y Hoare (ver [16]).

$$Rec(3, 23) = 49326$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 23 fue descubierta por Exoo (ver [28]).

$$Rec(3, 24) = 49608$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 24 fue descubierta por Bray, Parker y Rowley (ver [28]).

$$Rec(3, 25) = 108906$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 25 es de orden 108906 y fue obtenida por Exoo (ver [28]).

$$Rec(3, 26) = 109200$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 26 es de orden 109200. Es la gráfica descubierta por Bray, Parker y Rowley (ver [21]).

$$Rec(3, 27) = 285852$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 27 es de orden 285852. Es la gráfica descubierta por Bray, Parker y Rowley (ver [21]).

$$\text{Rec}(3, 28) = 415104$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 28 es de orden 415104. Es la gráfica descubierta por Bray, Parker y Rowley (ver [21]).

$$\text{Rec}(3, 29) = 1141484$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 29 es de orden 1141484 y fue construida por Exoo y Jajcay (ver [26]).

$$\text{Rec}(3, 30) = 1143408$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 30 es de orden 1143408 y fue construida por Exoo y Jajcay (ver [26]).

$$\text{Rec}(3, 31) = 3649794$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 31 es de orden 3649794 y fue construida por Bray, Parker y Rowley (ver [21]).

$$\text{Rec}(3, 32) = 3650304$$

La gráfica trivalente más pequeña conocida de cuello 32 es de orden 3650304 y fue construida por Bray, Parker y Rowley (ver [21]).

### 6.2.2. Construcciones Individuales para el cuello 5

Para gráficas de grado  $k$  y cuello 5, el límite de Moore es  $k^2 + 1$ . En este caso hay una Gráfica de Moore para los grados 3, 7, y tal vez 57. El caso  $k = 57$  no está resuelto, y ha recibido mucha atención.

Las gráficas más conocidas de cuello 5 y grado hasta 20 se enumeran en el siguiente Cuadro .

A continuación describiremos las gráficas del cuadro 6.3 que no son jaulas.

$$\text{Rec}(8, 5) = 80$$

Es la más pequeña conocida (8, 5)–Gráfica es de orden 80. Fue descubierta por Royle (ver [52]).

$$\text{Rec}(9, 5) = 96$$

Es la más pequeña conocida (9, 5)–Gráfica, es de orden 96, fue construida por Jørgensen (ver [42]) utilizando un clico relativo de diferentes conjuntos.

<i>Grado k</i>	Lím. Inferior	Lím. Superior	Debido a
3	10	10	Petersen (ver [51])
4	19	19	Robertson
5	30	30	Robertson-Wegner-Wong (ver [41], [24])
6	40	40	Wong (ver [55])
7	50	50	Hoffman-Singleton (ver [55])
8	67	80	Royle (ver [52])
9	86	96	Jørgensen (ver [42])
10	103	124	Exoo (ver [28])
11	124	154	Exoo (ver [28])
12	147	203	Exoo (ver [28])
13	174	230	Exoo (ver [28])
14	199	288	Jørgensen (ver [42])
15	230	312	Jørgensen (ver [42])
16	250	336	Jørgensen (ver [42])
17	294	448	Schwenk (ver [59])
18	327	480	Schwenk (ver [59])
19	364	512	Schwenk (ver [59])
20	403	576	Jørgensen (ver [42])

Cuadro 6.3: Límites para las jaulas de cuello 5

$$Rec(10, 5) = 124$$

Es la más pequeña conocida (10, 5)–Gráfica, es de orden 124 y fue descubierta por Exoo (ver [28]).

$$Rec(11, 5) = 154$$

Es la más pequeña conocida (11, 5)–Gráfica, es de orden 154 y fue descubierta por Exoo (ver [28]).

$$Rec(12, 5) = 203$$

Es la más pequeña conocida (12, 5)–Gráfica, es de orden 203 y fue descubierta por Exoo (ver [28]).

$$Rec(13, 5) = 230$$

Es la más pequeña conocida (13, 5)–Gráfica, es de orden 230 y fue descubierta por Exoo (ver [28]).

$$Rec(14, 5) = 288$$

Es la más pequeña conocida  $(14, 5)$ –Gráfica, es de orden 288, fue construida por Jørgensen (ver [42]).

$$Rec(15, 5) = 312$$

Es la más pequeña conocida  $(15, 5)$ –Gráfica, es de orden 312, fue construida por Jørgensen (ver [42]).

$$Rec(16, 5) = 336$$

Es la más pequeña conocida  $(16, 5)$ –Gráfica, es de orden 336, fue construida por Jørgensen (ver [42]).

$$Rec(17, 5) = 448$$

Es la más pequeña conocida  $(17, 5)$ –Gráfica, es de orden 448, y fue construida por Schwenk (ver [59]).

$$Rec(18, 5) = 480$$

Es la más pequeña conocida  $(18, 5)$ –Gráfica, es de orden 480, y fue construida por Schwenk (ver [59]).

$$Rec(19, 5) = 512$$

Es la más pequeña conocida  $(19, 5)$ –Gráfica, es de orden 512, y fue descubierta por Schwenk (ver [59]).

$$Rec(20, 5) = 576$$

Es la más pequeña conocida  $(20, 5)$ –Gráfica, es de orden 576, fue construida por Jørgensen (ver [42]).

### 6.2.3. Construcciones Individuales para el cuello 6

Cuando  $k = q + 1$ , para una potencia prima  $q$ , la  $(k, 6)$ -jaula es la gráfica de incidencia de un plano proyectivo. Fuera de estos casos, sólo hay un caso en el que el orden de la jaula ha sido establecido, es decir  $k = 7$ . Los restantes casos enumerados en el Cuadro provienen de las familias mencionadas en la Sección 6.1.3.

<i>Grado</i> $k$	Lím. Inferior	Lím. Superior	Debido a
3	14	14	Plano proyectivo
4	26	26	Plano proyectivo
5	42	42	Plano proyectivo
6	62	62	Plano proyectivo
7	90	90	O'keefe-Wong
8	114	114	Plano proyectivo
9	146	146	Plano proyectivo
10	182	182	Plano proyectivo
11	224	240	Wong
12	266	266	Plano proyectivo
13	314	366	Abreu-Funk-Labbate
14	366	366	Plano proyectivo
15	422	462	Abreu-Funk-Labbate
16	482	504	Abreu-Funk-Labbate
17	546	546	Plano proyectivo
18	614	614	Plano proyectivo
19	686	720	Abreu-Funk-Labbate
20	762	762	Plano proyectivo

Cuadro 6.4: Límites para las jaulas de cuello 6



# GRÁFICAS DE VOLTAJE

La construcción de las Gráficas de voltaje provienen originalmente en la Teoría Topológica.

Informalmente, los Gráficos de Voltaje son los ascensores de las gráficas base  $D$ , determinadas por una asignación que agrupa los elementos a las aristas orientadas de la gráfica base. Una gráfica de base es un Gráfica finita con posibles flechas y múltiples aristas. Denotamos su vértice, aristas y flecha conjuntos de  $V(G)$ ,  $A(G)$  y  $F(G)$ , respectivamente. Cada vértice  $e \in A(G)$  se representa dos veces en  $F(G)$  (una vez con cada una de las dos orientaciones posibles) y si  $e \in F(G)$ , denotamos la flecha inversa por  $e^1$ .

Las Gráficas de voltaje generalmente esán dadas por imágenes. Por ejemplo, supongamos que la Gráfica  $D$  tiene vértices establecidos  $V(D) = \{u, v\}$  y el conjunto de flechas  $F(D) = \{d, e\}$ , con  $d$  una  $u$ -base (lazo dirigido) y  $e$  es una flecha de  $u$  a  $v$ . Supongamos que los voltajes  $\alpha(d) = 1$  y  $\alpha(e) = 0$ . Dado un grupo finito  $\Gamma$ , una asignación de voltaje es una función  $\alpha : D(G) \rightarrow \Gamma$  que satisfaciendo la propiedad  $\alpha(e^{-1}) = g^{-1}$  siempre que  $\alpha(e) = g$ . El grupo  $\Gamma$  se llama grupo de voltaje. Dada una asignación de voltaje  $\alpha : D(G) \rightarrow \Gamma$ , el levantamiento de  $G$ , es llamado la gráfica derivada  $G$ , (gráfica generada por la gráfica base), denotada por  $G^\alpha$ , es la gráfica cuyo conjunto de vértices es  $V(G) \times \Gamma$  con dos vértices.  $(u, g)$  y  $(v, h)$  adyacentes si y solo si  $uv \in F(G)$  y  $g * \alpha(uv) = h$ .

**Ejemplo 0.0.7.** *La gráfica base en la Figura 64(a), tiene dos vértices,  $u$  y  $v$ , y dos flechas,  $d$  y  $e$ , y dado que el grupo de voltaje  $\mathcal{L}_3$  tiene tres elementos,  $0$ ,  $1$ , y  $2$ , se deduce que la gráfica derivada tiene seis vértices,  $u_0, u_1, u_2, v_0, v_1$ , y  $v_2$ , y seis flechas,  $d_0, d_1, d_2, e_0, e_1$ , y  $e_2$ . Dada la  $u$ -base (lazo dirigido)  $d^+$  de la gráfica base  $D$  es asignado el voltaje  $1$ , se sigue que*

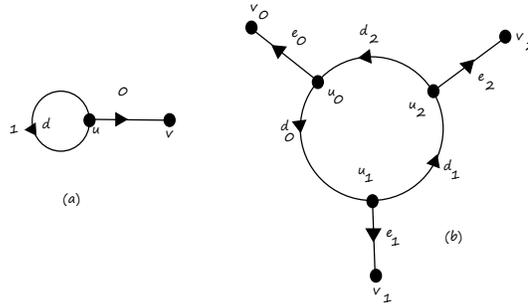


Figura 64: (a) Una gráfica con voltajes asignada. (b)Gráfica derivada asociada  $G^\alpha$

para  $i = 0, 1, 2$ , la flecha  $d_i^+$  de la gráfica derivada  $G$  se ejecuta desde el vértice  $u_i$  al vértice  $u_{i+1}$ . Desde la flecha  $e^+$  se le asigna el voltaje 0, se sigue que de  $i = 0, 1, 2$ ; la flecha  $e_i^+$  de la gráfica derivada se ejecuta desde el vértice  $u_i$  al vértice  $v_i$ .

**Ejemplo 0.0.8.** En la Figura 65 se muestra la gráfica de Petersen la cual podría derivarse, en una asignación de voltajes en el grupo cíclico  $\mathcal{L}_5$  a una gráfica base, que es en particular dos vértices y tres flechas, que a veces se denomina gráfica de “mancuerna”, como esta indica, la dirección en las aristas de la gráfica derivada son inducidas por direcciones de las flechas correspondientes en la gráfica base.

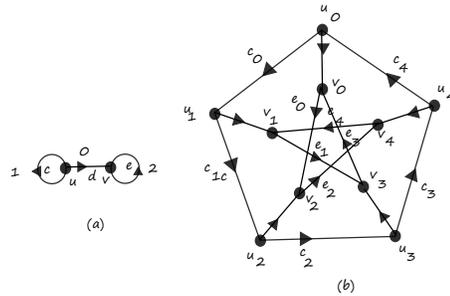


Figura 65: (b) Gráfica de Petersen de un voltaje asignado en  $\mathcal{L}_3$  de un gráfica mancuerna (a)

# Bibliografía

- [1] G. Araujo-Pardo, On upper bounds of odd girth cages, *Discrete Math.* 310 (2010).
- [2] G. Araujo-Pardo and C. Balbuena, Constructions of small regular bipartite graphs of girth 6, *Networks* 57 (2011) 121-127.
- [3] G. Araujo-Pardo, C. Balbuena and Héger, Finding small regular graphs of girths 6,8 and 12 as subgraphs of cages, *Discrete Math.* 310 (2010) 1301-1306.
- [4] G. Araujo, D. González, J. Montellano-Ballesteros and O. Serra, On upper bounds and connectivity of cages, *Australas. J. Combin.* 38 (2007) 221-228.
- [5] G. Araujo-Pardo and J. Montellano-Ballesteros, Cages: constructions and new upper bounds. *Proceedings of the 8th International IEEE Symposium on Parallel Architectures, Algorithms and Networks.*
- [6] C. Balbuena, A method for obtaining small regular bipartite graphs of girth 8, *DMTCS* 11 (2009)
- [7] A. T. Balaban, Trivalent graphs of girth nine and eleven, and relationships among cages, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* 18 (1973) 1033-1043.
- [8] A. T. Balaban, A trivalent graph of girth ten, *J. Combin. Theory Ser. B* 12 (1972) 1-5.
- [9] E. Bannai and T. Ito, On finite Moore graphs, *J. Fac. Sci. Tokyo, Sect. 1A*, 20 (1973) 191-208.
- [10] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic combinatorics I*, Benjamin and Cummings, 1984

- [11] E. Bannai C.T. Benson, Minimal regular graphs of girth eight and twelve, *Canad. J. Math.* 18(1966) 1091-1094.
- [12] C. Balbuena, A method for obtaining small regular bipartite graphs of girth 8, *DMTCS* 11 (2009) 33-46.
- [13] C.T. Benson, Minimal regular graphs of girth eight and twelve, *Canad. J. Math.* 18(1966) 1091-1094.
- [14] N.L. Biggs and A.G. Boshier, Note on the girth of Ramanujan graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* 49 (1990) 190-194.
- [15] N.L. Biggs and M.J. Hoare, A trivalent graph with 58 vertices and girth 9, *Discrete Math.* 30 (1980) 299-301.
- [16] N.L. Biggs and M.J. Hoare, The sextet construction for cubic graphs, *Combinatorica* (1983) 153-165.
- [17] N.L. Biggs and T.Ito, Graphs with even girth and small excess, *Math. Proc. Cam. Philos. Soc.* 88 (1980) 1-10.
- [18] N.L. Biggs, Constructions for cubic graphs of large girth, *Electron. J. Combin.* 5 (1998) A1.
- [19] N.L. Biggs, Cubic graphs with large girth, *Combinatorial Mathematics: Proceedings of the Third International Conference, Annals of the New York Academy of Sciences.*
- [20] R. C. Bose. Strongly regular graphs, partial geometries, and partially balanced designs, *Pacific J. Math.*, 13, 1963.
- [21] J. Bray, C. Parker and P. Rowley, Cayley type graphs and cubic graphs of large girth, *Discrete Math.* 214 (2000) 113-121.
- [22] W. G. Brown, On Hamiltonian regular graphs of girth 6, *J. London Math. Soc.* 42(1967) 514-520.
- [23] Chartrand Gary, Lesniak Linda, Zhang Ping. *Graphs Digraphs*, Sixth Edition, p.p. 514.
- [24] A. M. Cohen, A. E. Brouwer and A. Newmeier, *Distance Regular Graphs*, Springer, Berlin, 1989.
- [25] G. Exoo, A small trivalent graph of girth 14, *Electron. J. Combin.* 9 (2002) N3.

- [26] G. Exoo and R. Jajcay, On the girth of voltage graph lifts, *Europ. J. Combin.* 32 (2011) 554-562.
- [27] G. Exoo, New small trivalent graphs for girths 17, 18 and 20, preprint.
- [28] G. Exoo, Regular graphs of given degree and girth. *http : //ginger.indstate.edu/ge/CAGES*
- [29] G. Exoo, Voltage graphs, group presentations and cages, *Electron. J. Combin.* 11
- [30] P. Erdős and H. Sachs, Regullare Graphen gegebener Tailenweite mit minimaler Knotenzahl, *Wiss. Z. Uni. Halle (Math. Nat.)* 12 (1963) 251-257.
- [31] M. Euler, Leonhard (1736), Soition problematis and geometriam situs pertinentis, *Comment. Acad. Sci. U. Petrop* 8, 128-40.
- [32] A. Gács and T. Héger, On geometric constructions of  $(k; g)$ -graphs, *Contributions to Discrete Mathematics* 3 (2008) 63-80.
- [33] Geoffrey Exoo, Robert Jajcay. Dynamic Cage Survey, Department of Algebra, Comenius University, Version 3 published: July 26, 2013 (55 pages) Bratislava, Slovakia, Mathematics Subject Classifications: 05C35, 05C25
- [34] Geoffrey Exoo, On Voltage Graphs and Cages, Department of Mathematics and Computer Science Indiana State University Terre Haute, IN 47809 ,.April 4, 2003
- [35] C. Godsil and G. Royle. Algebraic graph theory. Graduate Texts in Mathematics 207. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [36] M. Hoare. Triplets and hexagons, *Graphs Combin.* 9 (1993) 225 - 233.
- [37] A.J. Hofman and R. R. Singleton, On Moore graphs with diameters 2 and 3, *IBM J. Res. Develop.* 4 (1960) 497-504.
- [38] W. Imrich, Explicit constructions of graphs without small cycles, *Combinatorica* 2 (1984) 53-59.
- [39] R. Jajcay and J. KSirákn, Small vertex-transitive graphs of given degree and girth, *Ars Mathematica Contemporanea* 4 (2011) 375-384.
- [40] L. K. Jørgensen, Girth 5 graphs from relative difference sets, *Discrete Math.* 293 (2005) 177-184.

- [41] F. Kárteszi, Piani finiti ciclici come risoluzioni di un certo problema di minimo, *Boll. Un. Mat. Ital.*
- [42] Levi, F. W. (1942), *Finite Geometrical Systems*, Calcutta: University of Calcutta.
- [43] F. Lazebnik, V.A. Ustimenko, and A.J. Woldar, A new series of dense graphs of high girth, *Bull. Amer. Math. Soc.* 32 (1995) 73-79.
- [44] A. Lubotzky, R. Phillips, and R. Sarnak, Ramanujan graphs, *Combinatorica* 8 (1988) 261-277.
- [45] G.A. Margulis, Explicit constructions of graphs without short cycles and low density
- [46] McGee, W. T. A minimal cubic graph of girth seven. *Canad. Math. Bull.* 3, 149-152, 1960.
- [47] W. Myrvold, B.D. McKay and J. Nadon, Fast backtracking principles applied to find new cages, 9th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, January 1998, 188-191.
- [48] M. O'Keefe and P.K. Wong, The smallest graph of girth 6 and valency 7, *J. Graph Theory* 5 (1981) 79-85.
- [49] M. O'Keefe and P.K. Wong, A smallest graph of girth 10 and valency 3, *J. Combin. Theory Ser. B* 29 (1980) 91-105.
- [50] M. O'Keefe and P.K. Wong, On certain regular graphs of girth 5, *Int. J. Math. and Math. Sci.*, 7 (1984) 785-791.
- [51] J. Petersen, Sur le theoreme de Tait, *L'intermédiaire des Mathématiciens* 5 (1898) 225-227.
- [52] Payne, S. E. Finite Generalized Quadrangles: A Survey. *Proceedings of the International Conference on Projective Planes*. Washington State Univ. Press, pp. 219-261, 1973.
- [53] Ringler, G. and Youngs, J. W. T. Solution of the Heawood Mapcoloring Problem. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. 1968
- [54] N. Robertson, The smallest graph of girth 5 and valency 4, *Bull. Amer. Math. Soc.* 70 (1964) 824-825.

[55] G. Royle

*<http://school.maths.uwa.edu.au/gordon/>*.

[56] C. Saager, G. Brinkmann and B. D. McKay, The smallest cubic graphs of girth nine, *Combin. Probab. Comput.* 5 (1995) 1-13.

[57] H. Sachs, Regular graphs with given girth and restricted circuits, *J. London Math. Soc.* 38 (1963) 423-429.

[58] N. Sauer, Extremaleigenschaften regularer Graphen gegebener Tailenweite, I and II, *Sitzungsberichte l Osterreich. Akad. Wiss. Math. Natur. Kl., S-B II*, 176 (1967) 9-25; 176 (1967) 27-43.

[59] A. Schwenk, Construction of a small regular graph of girth 5 and degree 19, conference presentation given at Normal, IL, U.S.A., April 18, 2008.

[60] J. Tits. Sur la trialité et certains groupes qui s'en déduisent. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* 1959.

[61] W.T. Tutte, A family of cubical graphs, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 43 (1947) 459-474.

[62] A.I. Weiss, Girth of bipartite sextet graphs, *Combinatorica* 4 (1984) 241-245.

[63] Weisstein, Eric W. Heawood Graph. En Weisstein, Eric W. *Math-Worrrld*. Wolfram Research.

[64] A. Wigderson, S. Vadhan, and O. Reingold , Entropy waves, the zig-zag graph product, and new constant-degree expanders, *Annals of Mathematics* 155 (1) (2002) 157-187.

[65] Wong, P. K. Çages A Survey." *J. Graph Th.* 6, 1-22, 1982